МГУ–ШКОЛЕ

М.К. Потапов А.В. Шевкин

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

6 класс

Пособие для учителей
общеобразовательных учреждений

Москва
«Просвещение»
2013

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
П64

Серия «МГУ—школе» основана в 1999 году

Потапов М. К.

П64 Математика. Методические рекомендации. 6 класс : пособие для учителей общеобразоват. учреждений / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012. — 000 с.: ил. — (МГУ—школе.) — ISBN 978-5-09-027735-8.

Эта книга адресована учителям, работающим по учебнику серии «МГУ – школе» «Математика 5» (авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин). В ней дана характеристика курса математики 5—6 классов, приведено примерное тематическое планирование для 6 класса, методические рекомендации по всем темам и решения наиболее трудных задач.

УДК 372.8:51
ББК 74.262.21
П64

ISBN 978-5-09-027735-8

Введение

О книге для учителя

Данная книга предназначена учителям, работающим по учебнику «Математика, 5» (авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин). Этот учебник является частью учебного комплекта для 5–6 классов, рекомендованного Министерством образования и науки Российской Федерации. Учебники для 5 и 6 классов начинают серию учебников «МГУ — школе» тех же авторов для 5−11 классов и нацелены на развитие и поддержку интереса к математике.

В учебный комплект для 5−6 классов входят:

- Математика. 5 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012;
- Математика. Дидактические материалы. 5 класс / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2009–2012;
- Математика. Рабочая тетрадь. 5 класс. В двух частях / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012;
- Математика. Тематические тесты. 5 класс / П. В. Чулков, Е. Ф. Шершнев, О.Ф. Зарапина. — М.: Просвещение, 2009–2012;
- Математика. 6 класс: учебник для общеобразоват. учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012;
- Математика. Дидактические материалы. 6 класс / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2007–2012;
- Математика. Рабочая тетрадь. 6 класс / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2007–2012;
- Математика. Тематические тесты. 6 класс / П. В. Чулков, Е. Ф. Шершнев, О. Ф. Зарапина. — М.: Просвещение, 2010–2012;

- Задачи на смекалку. 5–6 классы / И. Ф. Шарыгин, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2005–2012;
- Математика. Методические рекомендации. 5 класс / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012;
- Математика. Методические рекомендации. 6 класс / М. К. Потапов, А. В. Шевкин. — М.: Просвещение, 2012.

В данной книге рассмотрены концепция учебников математики серии «МГУ — школе» и структура учебников для 5–6 классов, приведено примерное тематическое планирование, даны методические рекомендации по изучению основных тем курса 5 класса и комментарии к решению некоторых трудных задач. Комментарии к учебнику приводятся по переработанному изданию 2012 г. Иногда комментарии к близким по содержанию пунктам объединены. При этом не обсуждается время, отводимое на изучение пункта, — оно отражено в планировании. В комментариях для учителя не выделяется обязательный и необязательный материал, так как в учебнике есть соответствующие обозначения. Во многих пунктах методические комментарии даны в расчёте на возможно более глубокое изучение вопроса, поэтому при подготовке к уроку учитель должен отобрать главное, что будет изложено учащимся на уроке, решить, каким будет закрепление материала в классе и дома, каким и когда будет контроль изученного. При этом не надо стремиться донести до учащихся все подробности и тонкости изучаемого материала, если учащиеся существенно ограничены во времени изучения темы. В книге также даны рекомендации по использованию дидактических материалов (**ДМ**) и рабочей тетради (**РТ**).

Практически для всех пунктов учебника в книге для учителя имеются рубрики **Решения и комментарии** и **Промежуточный контроль.** В первой из них приведены условия многих задач и их решения или даны рекомендации, как найти решение. При этом даны пояснения, помогающие обучению школьников. Во второй рубрике даны номера самостоятельных работ по дидактическим материалам.

Об учебниках математики серии «МГУ – школе»

В серии «МГУ — школе» издательство «Просвещение» издаёт учебники «Математика» для 5 и 6 классов, «Алгебра» для 7, 8 и 9 классов, «Алгебра и начала математического анализа» для 10 и 11 классов (авторы: С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин).

Эти учебники рекомендованы министерством в качестве учебников для любых типов общеобразовательных учреждений и входят в перечень учебников, рекомендованных к использованию в средних школах. Их издание является составной частью программы «МГУ — школе», разработанной по инициативе ректора Московского университета академика В. А. Садовничего и нацеленной на сохранение и развитие лучших традиций отечественного математического образования.

Авторами учебников разработана концепция многоуровневых учебников математики. Приведём основные положения этой концепции.

- Математика едина и может быть изложена в одном учебнике для работы по разным программам. Содержание учебника должно соответствовать научной точке зрения на изучаемые вопросы.
- Учебник должен сочетать в себе научность, стройность, экономность и логичность изложения материала с доступностью для учащихся его учебных текстов.
- Учебник не должен ограничиваться интересами среднего ученика, он должен удовлетворять интересам всех учащихся — от слабых до сильных.
- Учебник должен быть пригоден для организации дифференцированного обучения и обеспечивать любой желаемый уровень глубины изучения материала.
- Способ изложения материала в учебнике, организация учебных текстов и системы упражнений должны обеспечивать достижение разных целей обучения при работе по разным программам.

Структура учебников серии «МГУ — школе» и их методический аппарат отвечают основным положениям этой концепции.

Авторы учебников уверены, что не следует упрощать обучение за счёт сокращения числа изучаемых вопросов и необходимо сохранить фундаментальность изложения теории в учебниках, оставляя за учителем право более или менее глубокого изложения теоретического материала на уроке в зависимости от уровня подготовки класса и целей обучения. В учебниках коротко, ясно и доступно, без долгих введений излагается суть вопроса. Мотивировать появление тех или иных понятий, определений, при необходимости, должен учитель, так как в разных классах это надо делать по-разному.

Учебники серии «МГУ — школе» имеют высокий научный и методический потенциал. Они отличаются расположением учебного материала в естественной логической последовательности, позволяющей излагать материал более глубоко, экономно и строго. Учебники нацелены не только на формирование навыков, а учат действовать осознанно. Обычно обучение больше ориентировано на вопрос «как?», на действия по образцу, требует многократных повторений для поддержания навыков. В учебниках серии «МГУ — школе» уделяется достаточно внимания вопросу «почему?», имеющему большой развивающий потенциал. Учебники позволяют интенсифицировать процесс обучения, что в условиях уменьшения числа учебных часов особенно важно. Они полностью обеспечивают обучение тех школьников, которые хотят и могут обучаться основам наук.

Главный методический принцип, положенный в основу изложения теоретического материала и организации системы упражнений, заключается в том, что ученик за один раз должен преодолевать не более одной трудности. Поэтому каждое новое понятие формируется, каждое новое умение отрабатывается сначала в «чистом» виде, затем трудности совмещаются. Так происходит, например, при изучении арифметических действий с обыкновенными дробями: сначала изучаются обыкновенные дроби, только потом вводится понятие смешанной дроби и изучаются арифметические действия со смешанными дробями.

Важную роль в формировании первоначальных представлений о зарождении и развитии математики играют исторические сведения, завершающие каждую главу учебников. Работа со старинными задачами — одна из сильных сторон учебников, она может много дать в воспитании уважения к традициям и истории.

О структуре учебников математики для 5 и 6 классов

Авторы считают, что основное содержание курса математики для 5−6 классов должна составлять арифметика. Именно поэтому первые издания учебников для 5−6 классов назывались «Арифметика». Этим подчеркивалась значимость основательного изучения арифметики до изучения систематических курсов алгебры и геометрии, а также уважение к традициям отечественного математического образования.

Арифметика — стержень курса математики для 5−6 классов и фундамент всей школьной математики и смежных дисциплин. Это важнейшая основная логическая наука. Правильное её изучение приводит не только к умению вычислять, но и к умению логически мыслить. Поэтому необходимо основательное изучение арифметики каждым учеником независимо от профиля школы, в которой он учится, и образования, которое будет получать в дальнейшем.

Внутренняя логика арифметики диктует порядок изложения основного учебного материала. Существенной особенностью учебников является расположение материала в естественной логической последовательности, позволяющей сделать его изучение более глубоким, экономным и строгим. Из всех возможных схем изложения материала в учебниках выбрана та, которая отвечает научным представлениям о расширении понятия числа и в то же время учитывает возрастные особенности учащихся 5−6 классов, количество учебных часов, отведённых программой на курс математики в этих классах. Так, в частности, обыкновенные дроби изучаются в 5 классе в полном объёме до десятичных дробей, которые рассматриваются в 6 классе; целые числа изучаются отдельно до отрицательных дробей, что позволяет учащимся освоиться с идеей знака числа в более простой ситуации, после чего вводятся рациональные числа; наконец, изучается запись некоторых рациональных чисел в виде десятичных дробей и показывается как действовать с ними. Такая схема изложения материала позволяет интенсифицировать процесс обучения.

Принципиальной особенностью учебников является то, что они не «натаскивают» ученика, они ориентированы не только на формирование навыка, а учат действовать осознано.

Учебники серии «МГУ — школе» ориентированы на более высокие, чем формирование вычислительных навыков, цели: на формирование теоретического мышления и простейших доказательных умений, вычислительных умений, опирающихся на понимание смысла выполняемых действий, а не на схожесть алгоритмов вычислений, на развитие мышления и речи учащихся в процессе изучения арифметики, на формирование и развитие универсальных учебных действий.

Известно, что спорам о необходимости обоснованного изложения арифметического материала не одна сотня лет. Ещё Л. Эйлер писал: «Если арифметика без оснований и доказательств показываться будет, то оная не довольна ни к разрешению всех случаев, ни к поощрению человеческого разума, о чём наипаче надлежало бы стараться». По его мнению, в арифметике надо учеников «приучать праведное основание и причину видеть», благодаря чему они «приобвыкнут к основательному размышлению».

В учебниках вводятся элементы доказательств некоторых утверждений, при этом доказательства часто проводятся на конкретных примерах.

Для решения текстовых задач в основном используются арифметические способы, применение уравнений к решению таких задач отнесено на вторую половину 6 класса. Основной целью решения текстовых задач арифметическими способами является развитие мышления, умения делать логически правильные выводы на основе анализа имеющихся данных задачи и использовать эти данные для её решения. Авторы считают, что это пока наиболее эффективный способ развития логического мышления и речи учащихся, что в конечном счёте повышает эффективность обучения. Следует отметить, что отказ от решения текстовых задач арифметическими способами в рамках реформы математического образования конца 60-х годов XX в. привёл к заметному ухудшению речи учащихся и их логического мышления.

Академик С. М. Никольский считает: «при обучении арифметике в 5−6 классах большое внимание должно быть уделено «физике» и логике изучаемых вопросов. Так, при изучении обыкновенных дробей необходимо привести примеры, приводящие к пониманию дроби. Это такие важнейшие «физические» примеры, как:

1) три одинаковых яблока разделить между пятью мальчиками поровну;

2) убедиться в том, что две третьих части торта и четыре шестых его части — это физически одно и то же.

Первая задача приводит не только к дроби $\frac{3}{5}$, но и к тому, что её надо рассматривать как частное 3 : 5. Вторая задача приводит к естественности формального равенства $\frac{2}{3}=\frac{4}{6}$. Перед авторами учебников стоит задача все эти вещи формализовать, изложить компактно и доступно, но так, чтобы было видно, где в них логическое начало и где конец, где здесь «физика» и где логика. Арифметика — логическая наука, на ней можно и нужно учиться логически мыслить. Счастливым образом формализм арифметики имеет прикладное значение, потому что он даёт правила вычислений. Но прикладной части тоже надо уделить внимание. Умножить $\frac{2}{3}$ на $\frac{5}{7}$ — это значит вычислить дробь $\frac{2\cdot5}{3\cdot7}$. Это надо твёрдо знать. Но также необходимо знать, что при этом мы решили и «физическую» задачу — взяли две третьих части от пяти седьмых (например, яблока) или вычислили площадь прямоугольника со сторонами $\frac{2}{3}$ и $\frac{5}{7}$».

В учебниках «Математика, 5», «Математика, 6» учтены эти высказывания С. М. Никольского. Авторы стремились в изложении теоретического материала для младших школьников избегать ставших уже традиционными логических подмен, когда факты для чисел получаются не из определений операций, а из физических действий над предметами. Так, например, упомянутое деление поровну трёх одинаковых яблок между пятью мальчиками, действительно, приводит к равенству $\frac{3}{5} = 3 : 5$, но не доказывает это равенство. Сравнение дробей вводится иногда с помощью никак не определенного сложения равных долей, а правило умножения отрицательных чисел «доказывается». Такого рода «доказательства» должны считаться неприемлемыми и опасными не только для логического развития школьников, но и для квалификации учителя математики.

Авторы учебников считают, что изучение чисел в средней школе должно проводиться по следующей схеме.

1. Сначала основательно изучаются натуральные числа.

2. Затем изучаются обыкновенные дроби. При этом очень важным моментом здесь является понимание того, что арифметические действия с обыкновенными дробями происходят по правилам

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}\ (b\neq 0,\ d\neq 0),$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}\ (b\neq 0,\ d\neq 0),$$

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}\ (b\neq 0,\ d\neq 0), \qquad (*)$$

$$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}\ (b\neq 0,\ c\neq 0,\ d\neq 0),$$

т. е. действия с обыкновенными дробями представляют собой несколько действий с натуральными числами. Следовательно, если усвоены действия с натуральными числами, то в работе с обыкновенными дробями возникает только одна трудность — запоминание правил (*), которые учащиеся усваивают в соответствующих формулировках и на конкретных примерах. Заметим, что экономное выполнение сложения и вычитания дробей требует приведения дробей к наименьшему общему знаменателю.

3. Потом изучаются целые числа. Здесь также одна трудность — работа со знаками. А работа с абсолютными величинами — натуральными числами — должна быть усвоена ранее.

4. Наконец, изучаются рациональные числа. Здесь основной трудностью является понимание того, что арифметические действия с рациональными числами производятся по тем же правилам (*). Только теперь числа a, b, c, d не натуральные, а целые.

Важность правил (*) заключается ещё и в том, что в курсе алгебры 7 класса по этим правилам будут выполняться действия с алгебраическими дробями.

Только после изучения всех рациональных чисел можно переходить к изучению конечных десятичных дробей (сначала положительных), так как они:

1) являются частным случаем обыкновенных дробей;

2) позволяют проводить приближённые вычисления;

3) естественным образом подводят к бесконечным десятичным дробям, т. е. к изучению действительных чисел.

Действительные числа можно изучать в конце 6 класса и/или в начале 7 класса, используя учебники «Математика, 6» и «Алгебра, 7» серии «МГУ – школе».

Ведущей идеей учебников для 5−6 классов является идея формирования понятия числа как длины отрезка, а точнее, как координаты точки на координатной оси.

В учебниках уделено достаточно внимания алгебраическому и геометрическому материалу, который принято изучать в 5−6 классах. Но этот материал расположен так, чтобы не мешать развитию арифметических идей. В учебнике употребляются буквы, но очень осторожно — только тогда, когда кажется, что буквы легче проясняют вопрос, чем пример с числами. В большей части рассуждений доказательства ведутся на характерных числовых примерах, из которых при замене чисел буквами можно получить общее доказательство. Всё же примеров, когда можно использовать буквы, достаточно много, и, таким образом, учебники вносят определенный алгебраический элемент в образование учащихся.

В учебниках имеются нестандартные развивающие задачи, старинные задачи. Это позволяет значительно расширить возможности для развития мышления и речи учащихся, их представления о способах решения задач в далёкие времена, разнообразить приёмы решения задач, может способствовать развитию школьников, формированию у них интереса к решению задач и к самой математике.

Особенности построения системы упражнений в учебниках математики

Главная особенность построения системы упражнений в учебниках заключается в учёте важного методического принципа: «ученик должен преодолевать за один раз не более одной трудности». Другими словами, сложность заданий в каждом пункте должна нарастать линейно. При этом в учебниках имеется достаточное число действительно сложных задач — учитель сам должен определить, на какой ступени лестницы сложности он остановится со своим классом или с конкретным учеником.

Кроме того, для каждого нового действия, приёма решения задач в учебнике имеется достаточное число упражнений, которые не перебиваются упражнениями на другие темы.

Третья особенность системы упражнений в учебниках заключается в том, что к наиболее трудным видам деятельности учащиеся готовятся заранее. Так происходит с упомянутыми задачами на совместную работу, с введением понятия дроби, с подготовкой к использованию уравнений при решении задач. К некоторым трудным задачам учащиеся возвращаются многократно, но обязательно поднимаясь на новую ступень в освоении материала. Так, в 6 классе сначала изучаются простейшие задачи на проценты, потом, после изучения десятичных дробей, учащиеся осваивают решение тех же задач с использованием умножения и деления на дробь. Далее введён необязательный пункт «Сложные задачи на проценты», в котором приведены задачи на так называемые сложные проценты, и через некоторое время показано применение калькулятора для ведения процентных расчётов. Все указанные меры помогут учащимся освоить проценты на более высоком, чем это удавалось до сих пор, уровне.

Четвёртая особенность системы упражнений в учебниках заключается в регулярном использовании старинных задач — это связано с необходимостью демонстрации учащимся разнообразных, в том числе и не применяемых сейчас, способов решения задач. Тем самым учащиеся получают не только весьма полезный опыт мыслительной деятельности при решении задач, но и важное воспитательное воздействие от знакомства с древнейшим пластом человеческой культуры.

Наконец, пятая особенность построения системы упражнений в учебниках заключается в систематическом использовании занимательных задач как в упражнениях по отдельным темам, так и в специальных пунктах в конце глав. Трудная для данного возраста учебная деятельность школьников должна стимулироваться интересными заданиями, иногда даже не связанными напрямую с изучаемым материалом. Это необходимо делать для повышения интереса учащихся сначала к урокам математики, а потом и к изучению самого предмета.

Разделы «Занимательные задачи», расположенные после каждой главы, содержат задачи, главное назначение которых заключается в том, чтобы заинтересовать учащихся решением нестандартных и сложных задач.

Некоторые учащиеся к началу 5 класса ещё не успели почувствовать себя способными к успешному изучению математики. Это может происходить по разным причинам (медленное письмо, ошибки по невнимательности, накопившиеся пробелы в знаниях и т. п.). Поэтому их успехи в работе с задачами, решение которых мало зависит от предыдущего обучения, а больше от сообразительности, могут вернуть им веру в свои силы.

В отдельные пункты разделов «Занимательные задачи» часто помещаются задачи, завершающие некоторые задачные линии учебника и не являющиеся обязательными для всех учащихся. Их можно использовать как в классной работе с сильным классом, так и для индивидуальной работы с сильными учащимися или для внеклассной работы.

В учебниках использованы некоторые задачи из сборника «Задачи для умственного счёта» С. А. Рачинского, который окончил естественно-исторический факультет Московского университета, блестяще начал карьеру молодого профессора, затем переехал в село Татево Бельского уезда Смоленской губернии и там работал учителем.

При доработке учебников для 5 и 6 классов в соответствии с требованиями Федерального государственного стандарта общего образования авторы учебника выделили некоторые из заданий учебника в отдельные рубрики. Отметим, что большая часть заданий для рубрик «Доказываем», «Исследуем» содержалась в учебниках предыдущих изданий, но выделение рубрик акцентирует внимание учителя и ученика на тех видах учебной деятельности, которые предполагается применять и развивать, выполняя именно эти задания. Для рубрик «Исследуем», «Ищем информацию», «Придумываем задачи» были составлены новые задания.

Таким образом, в учебниках и других книгах серии «МГУ – школе» имеются задания для осмысления теоретического материала, на воспроизведение и действия по образцу, для самостоятельного поиска решения и исследования, для проведения мысленного эксперимента и доказательства, для проявления творческого подхода к учению и собственных личностных качеств, для самоконтроля, что отвечает требованиям стандартов второго поколения.

О работе по учебникам «Математика, 5», «Математика, 6»

В учебниках параграфы без звёздочки соответствуют стандарту по математике. Параграфы со звёздочкой и специально выделенный в параграфах без звёздочек материал предназначены для учащихся, заинтересованных в изучении математики. Этот материал можно использовать при наличии достаточного учебного времени.

Каждая глава учебников завершается разделом, содержащим дополнительный материал, исторические сведения и занимательные задачи. В конце учебников помещены разделы «Задания для повторения», содержащие задания для повторения изученного в 5 или в 6 классе и за предыдущие годы.

В обычных классах дополнительные материалы и сложные задачи, специально выделенные в учебниках, можно не рассматривать. Пропуск необязательных пунктов и задач не нарушает целостности курса. Уменьшается лишь уровень погружения учащихся в теоретические тонкости, а также число доказываемых фактов, технически или идейно сложных задач. Однако учебники позволяют заинтересованному ученику изучить необходимый материал по учебнику самостоятельно или под руководством учителя.

Работать по учебнику для 5 класса можно после обучения в 4 классе по любому из учебников, рекомендованных Министерством образования и науки РФ, так как в начале учебника повторяются основные вопросы программы начальной школы, что позволяет систематизировать имеющиеся знания и подготовиться к изучению нового материала.

При организации повторения курса математики 5 или 6 класса необходимо обратить особое внимание на наиболее трудные темы для данного класса, постараться учесть индивидуальные пробелы учащихся.

При повторении необходимо выделять основные теоретические факты, изученные за год, давая иллюстрации их применения на наиболее характерных примерах. При этом можно использовать задачи из раздела «Задания для повторения».

«Математика, 6»

Учебник «Математика, 6» содержит пять глав:

1. Отношения, пропорции, проценты.

2. Целые числа.

3. Рациональные числа.

4. Десятичные дроби.

5. Обыкновенные и десятичные дроби.

Основная цель — научить школьников осознанному владению арифметическими действиями над рациональными числами.

В условиях сокращения учебного времени на изучение курса математики (5 ч в неделю) формирование простейших алгебраических умений включает лишь умение решать несложные уравнения с использованием переноса слагаемых из одной части уравнения в другую с противоположным знаком. Приведение подобных слагаемых считается необязательным умением, которое будет формироваться при изучении курса алгебры 7 класса. Это означает, что формальное правило приведения подобных слагаемых при решении уравнений заменяется содержательной работой по применению распределительного закона при вынесении общего множителя за скобки (что полезнее для осознания смысла выполняемых действий).

Формирование геометрических представлений — о симметриях на плоскости и в пространстве, о разрезании фигур на клетчатой бумаге — считается дополнительной целью, реализуемой в классах с повышенной мотивацией к учению и при наличии дополнительного учебного времени (6 ч в неделю).

Глава 1 предваряет изучение объёмного арифметического материала, она задает тематику задач, которые можно будет использовать для повторения при изучении материала следующих глав. Такое построение учебника позволяет растянуть во времени процесс овладения учащимися важными практическими умениями (решение задач на пропорции и проценты), даёт учителю возможность доучивать слабых учащихся после того, как закончится изучение материала этой главы.

В 6 классе первое расширение числового множества происходит от натуральных чисел к целым. Затем в таком же порядке (вводим новые числа, учимся выполнять с ними четыре арифметических действия, учимся изображать их на координатной оси) изучаются обыкновенные дроби произвольного знака, т. е. все рациональные числа. Лишь после этого появляется особый способ записи некоторых из обыкновенных дробей — в виде десятичных дробей. При изучении десятичных дробей учащиеся сталкиваются с тем, что результат деления десятичных дробей не всегда выражается конечной десятичной дробью — здесь естественно возникает вопрос об округлении.

Учащиеся должны овладеть понятием приближённого значения результата действий над числами, записанными в виде десятичных дробей; научиться правильно округлять числа для получения верного результата.

Рассматривая связь обыкновенных и десятичных дробей в главе 5, надо естественным образом ввести бесконечные десятичные дроби, т. е. ввести все действительные числа. Важным моментом здесь является установление взаимно однозначного соответствия между действительными числами и точками координатной оси.

Желательно, чтобы учащиеся поняли, что если рассматривать соответствие между рациональными числами и точками координатной оси, то ось будет «дырявая» — не всем её точкам соответствуют рациональные числа. Зато после введения действительных чисел ось перестаёт быть «дырявой» — любой её точке соответствует действительное число.

Стоит подчеркнуть, что даже в слабом классе и при недостатке учебного времени материал главы 5 следует изучить хотя бы ознакомительно, так как в противном случае в следующем году его придётся не повторять, а изучать заново.

При работе по данному учебнику предполагается использование рабочей тетради, дидактических материалов, сборника тестов и сборника «Задачи на смекалку».

Рабочая тетрадь чаще используется на этапе начального усвоения понятия или умения. Здесь заполнение пропусков и наличие подсказок позволяет увеличить темп продвижения по материалу.

Дидактические материалы используются для промежуточного контроля по теме (самостоятельные работы) и итогового контроля (контрольные работы). Следует учесть, что провести все самостоятельные работы с выставлением отметки со всем классом, скорее всего, не удастся, да это и не требуется. Некоторые из них можно использовать как домашние задания или как дополнительные задания на отметку заинтересованным учащимся. Самостоятельные работы отнесены к соответствующим темам, но могут использоваться и при изучении других тем (например, для организации повторения изученного через некоторый промежуток времени).

В обязательную часть самостоятельных работ на отметку можно включать не все задания, ориентируясь на уровень подготовки класса и на отводимое для работы время. Необязательные задания можно оценивать дополнительной отметкой.

В обязательную часть контрольных работ можно не включать последнее задание.

В рубрике **Промежуточный контроль** указаны номера самостоятельных (например, С–1) и контрольных (К–1) работ по дидактическим материалам, тестов (Т–1) по сборнику тестов, которые можно использовать при изучении данной темы.

Задачи из сборника «Задачи на смекалку» и разделов «Занимательные задачи» можно включать в работу на уроке по мере необходимости разнообразить изучаемый материал. Эта работа развивает сообразительность у детей, интерес к математике и вкус к решению задач.

Примерное тематическое планирование работы
по учебнику «Математика, 6»

Из приведенных двух вариантов примерного тематического планирования вариант I (5 ч в неделю, всего 170 ч) предназначен для классов, работающих по обычной программе, а вариант II (6 ч в неделю, всего 204 ч) — для классов, работающих по расширенной программе. Справа от пункта учебника указано число часов, отведенных на его изучение для каждого варианта планирования.

	I	**II**
Глава 1. Отношения, пропорции, проценты	**26**	**31**
1.1. Отношения чисел и величин	2	2
1.2. Масштаб	2	2
1.3. Деление числа в данном отношении	3	3
1.4. Пропорции	3	4
1.5. Прямая и обратная пропорциональность	4	4
Контрольная работа № 1	1	1
1.6. Понятие о проценте	3	3
1.7. Задачи на проценты	3	3
1.8. Круговые диаграммы	2	2
Дополнения к главе 1		
1. Задачи на перебор всех возможных вариантов	–	2
2. Вероятность события	–	2
3. Исторические сведения	–	–
4. Занимательные задачи	2	2
Контрольная работа № 2	1	1

Контрольная работа № 5	1	1
Дополнения к главе 3		
1. Буквенные выражения	–	2
2. Фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой	–	3
3. Исторические сведения	–	–
4. Занимательные задачи	2	4
Глава 4. Десятичные дроби	**34**	**43**
4.1. Понятие положительной десятичной дроби	2	2
4.2. Сравнение положительных десятичных дробей	2	2
4.3. Сложение и вычитание положительных десятичных дробей	4	4
4.4. Перенос запятой в положительной десятичной дроби	2	2
4.5. Умножение положительных десятичных дробей	4	4
4.6. Деление положительных десятичных дробей	4	4
Контрольная работа № 6	1	1
4.7. Десятичные дроби и проценты	4	4
4.8.* Сложные задачи на проценты	–	2
4.9. Десятичные дроби произвольного знака	2	2
4.10. Приближение десятичных дробей	3	3
4.11. Приближение суммы, разности, произведения и частного двух чисел	3	3
Контрольная работа № 7	1	1
Дополнения к главе 4		
1. Вычисления с помощью калькулятора	–	1
2. Процентные расчёты с помощью калькулятора	–	2
3. Фигуры в пространстве, симметричные относительно плоскости	–	2
4. Исторические сведения	–	–
5. Занимательные задачи	2	4

Глава 5. Обыкновенные и десятичные дроби	**24**	**30**
5.1. Разложение положительной обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь	2	2
5.2. Бесконечные периодические десятичные дроби	2	2
5.3*. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби	–	1
5.4. Непериодические бесконечные десятичные дроби	2	2
5.5*. Действительные числа	–	1
5.6. Длина отрезка	3	3
5.7. Длина окружности. Площадь круга	3	3
5.8. Координатная ось	3	3
5.9. Декартова система координат на плоскости	3	3
5.10. Столбчатые диаграммы и графики	3	3
Контрольная работа № 8	1	1
Дополнения к главе 5		
1. Задачи на составление и разрезание фигур	–	2
2. Исторические сведения	–	–
3. Занимательные задачи	2	4
Повторение	**14**	**16**
Повторение курса за 5–6 классы	13	15
Итоговая контрольная работа № 9	1	1

Глава 1. Отношения, пропорции, проценты

В этой главе вводятся важные понятия, используемые не только в математике и смежных дисциплинах, но и в обиходе: отношения, масштаб, пропорции, проценты, круговые диаграммы. Этот материал позволит в начале учебного года повторить действия с натуральными числами и обыкновенными дробями, изученные в 5 классе. На конкретном задачном материале изучаются прямая и обратная пропорциональности. Задачи на проценты решаются на уровне содержательного понимания процента — как задачи на нахождение части числа и числа по его части. Очень важно, чтобы учащиеся разобрались с понятием процента (но без десятичных дробей, которых еще не было). Здесь на новом материале продолжается обучение учащихся решению текстовых задач арифметическими методами.

В начале учебного года восстанавливаются навыки вычислений с натуральными числами и обыкновенными дробями, ослабленные за лето, на фоне включения в учебный процесс важных прикладных задач, связанных с пропорциями и процентами. Задачи на проценты рассматриваются и решаются как задачи на дроби, показывается их решение с помощью пропорций. После изучения десятичных дробей появится еще один способ решения задач на проценты, связанный с умножением и делением на десятичную дробь. В ознакомительном порядке рассматриваются темы «Задачи на перебор всех возможных вариантов» и «Вероятность события».

Цели изучения главы:

- сформировать у учащихся понятия пропорции и процента;
- научить решать задачи на деление числа в данном отношении, на прямую и обратную пропорциональность, на проценты.

1.1. Отношения чисел и величин

В данном пункте вводится понятие отношения двух неравных нулю чисел a и b, отношения величин и соответствующая терминология: члены отношения, однородные величины. Подчеркнём, что отношением двух неравных нулю чисел a и b называют как выражение $a:b$, так и его значение.

Показывается, что некоторые известные величины являются отношениями других величин (скорость, плотность вещества, цена). Здесь же сформулировано свойство отношения.

Учащиеся должны понимать, что отношение величин одного наименования (длин, скоростей и т. д., выраженных одинаковыми единицами измерения), есть число, а отношение величин разных наименований (пути и времени, стоимости товара и его количества и т.д.) есть новая величина.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **1–15**. Особое внимание надо обратить на задания **4–5** на выражение скорости в других единицах измерения, для решения которых в рабочей тетради приведены образцы. Эти задания лучше выполнить до решения задач **15–19** из учебника.

Решения и комментарии

18. Скорость легковой автомашины 1200 м/мин. За сколько часов машина проедет: а) 144 км; б) 36 км?

Решение. При решении задач на движение надо следить за тем, чтобы учащиеся согласовывали наименования скорости, времени и расстояния, т. е. если скорость выражена в километрах в час, то расстояние должно быть выражено в километрах, а время в часах. Например, в задании **18** скорость выражена в метрах в минуту, а расстояние — в километрах. Поэтому можно рассуждать так. Автомашина проезжает 1200 м за 1 мин, а 1 ч = 60 мин, следовательно, за 1 ч она проедет 1200 · 60 = 72 000 м, или 72 км. Скорость автомашины 72 км/ч.

Но можно выполнить такое преобразование:

$$1200\ \text{м/мин} = {}^{60/}\frac{1200\text{м}}{1\text{мин}} = \frac{72000\text{м}}{60\text{мин}} = \frac{72\text{км}}{1\text{ч}} = 72\ \text{км/ч}.$$

Следовательно, автомашина проедет: а) 144 км за 2 ч; б) 36 км за $\frac{1}{2}$ ч.

20. Два конькобежца одновременно стартовали на дистанцию 10 000 м по замкнутой дорожке, длина которой равна 400 м. Скорость первого конькобежца 20 км/ч, а скорость второго 21 км/ч. Обгонит ли второй конькобежец первого на круг до конца дистанции? А на два круга?

Решение. Так как 10 000 м = 10 км, то вся дистанция равна 10 км.

1) $10 : 20 = \frac{1}{2}$ (ч) — время, за которое первый конькобежец пробежит всю дистанцию;

2) $10 : 21 = \frac{10}{21}$ (ч) — время, за которое второй конькобежец пробежит всю дистанцию;

3) $\frac{1}{2} - \frac{10}{21} = \frac{1}{42}$ (ч) — время, на которое первый конькобежец отстал от второго на дистанции;

4) $20 \cdot \frac{1}{42} = \frac{10}{21}$ (км) — расстояние, на которое первый конькобежец отстал от второго на дистанции.

Так как первый конькобежец отстанет от второго на $\frac{10}{21}$ км = $476\frac{4}{21}$ м, а это больше одного круга, но меньше двух кругов по 400 м, то второй конькобежец обгонит первого на один круг, но не обгонит на два круга.

Ответ. Обгонит на один круг, но не обгонит на два круга.

1.2. Масштаб

В данном пункте вводятся понятия масштаба, численного масштаба, приводятся примеры применения этих понятий к решению задач практического характера.

При изучении данного материала учащиеся должны научиться решать три основные задачи: определять масштаб по заданному расстоянию на местности и расстоянию на карте (плане); при заданном масштабе и расстоянии на местности определять расстояние на карте (плане); при заданном масштабе и расстоянии на карте (плане) определять расстояние на местности.

Отметим, что масштаб может быть выражен дробью (численный масштаб) или изображён графически (линейный масштаб) — как на рисунке

1 учебника.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **16–20**.

Решения и комментарии

27. Прямоугольник со сторонами 12 см и 6 см изображает на плане поле, занятое под овёс. Определите масштаб плана, если бóльшая сторона поля имеет длину 360 м. Определите меньшую сторону поля.

Решение. Определим сначала масштаб плана:

$$12 \text{ см} : 36\,000 \text{ см} = 1 : 3000.$$

Теперь найдём реальную длину второго отрезка:

$$6 \text{ см} \cdot 3000 = 18\,000 \text{ см} = 180 \text{ м}.$$

32. Можно ли начертить план здания (прямоугольной формы в основании) длиной 50 м и шириной 20 м на странице тетради, если использовать масштаб 1 : 50? Какой масштаб следует использовать, чтобы план поместился на странице тетради?

Решение. Если масштаб 1 : 50, то размеры изображения здания на плане будут

$$50 \text{ м} : 50 = 1 \text{ м} \qquad \text{и} \qquad 20 \text{ м} : 50 = \frac{2}{5} \text{ м} = 40 \text{ см}.$$

Такое изображение не поместится в тетради.

Если масштаб 1 : 500, то размеры изображения здания на плане будут

$$50 \text{ м} : 500 = \frac{1}{10} \text{ м} = 10 \text{ см} \quad \text{и} \quad 20 \text{ м} : 500 = \frac{1}{25} \text{ м} = 4 \text{ см}.$$

Такое изображение поместится в тетради. (Учащиеся могут предложить и другой масштаб, например 1 : 400, 1 : 1000.)

34. Определите, увеличен или уменьшен предмет, если он изображён в масштабе: а) 1 : 100; б) 10 : 1?

Решение. а) Масштаб 1 : 100 показывает, что 1 см на плане соответствует 100 см на местности. Предмет уменьшен.

б) Масштаб 10 : 1 показывает, что 10 см на плане соответствует 1 см на местности. Предмет увеличен.

Промежуточный контроль. С–1, Т–1, Т–2.

1.3. Деление числа в данном отношении

В данном пункте разъясняется способ решения задач делением числа в данном отношении. Это одна из задач, близкая к задачам «на части», которую надо уметь решать при изучении курса арифметики. Она имеет перспективу — в курсе математики 6 класса, алгебры и геометрии старших классов имеется много таких задач. Достаточно вспомнить задачу на применение свойства биссектрисы, делящей сторону треугольника на части, пропорциональные двум другим его сторонам.

В учебнике приведено решение следующей задачи.

Задача 3. Первая машинистка может перепечатать 90 страниц за 10 ч, вторая — за 15 ч. Как разделить между ними 90 страниц, чтобы они перепечатали их в кратчайший срок?

В учебнике показано, что первая машинистка за 1 ч перепечатывает 9 страниц, а вторая — 6 страниц, поэтому число 90 надо разделить в отношении 9 : 6 = 3 : 2. Получится 54 и 36 страниц.

На этом примере можно объяснить, что значит разделить число в обратном отношении (этот приём решения не является обязательным для всех школьников).

Дело в том, что, деля 90 страниц в отношении 9 : 6, их делят в отношении 15 : 10, так как $9 : 6 = \frac{90}{10} : \frac{90}{15} = 15 : 10$, т. е. для решения задачи можно 90 страниц разделить в отношении 15 : 10, обратном к отношению 10 : 15.

Заметим, что эта же задача может быть решена и как задача «на совместную работу»:

1) $1 : 10 = \frac{1}{10}$ (рукописи) — перепечатывает первая машинистка за 1 ч;

2) $1 : 15 = \frac{1}{15}$ (рукописи) — перепечатывает вторая машинистка за 1 ч;

3) $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ (рукописи) — перепечатывают обе машинистки за 1 ч совместной работы;

4) $1 : \frac{1}{6} = 6$ (ч) — время перепечатки всей рукописи при совместной работе;

5) $90 : 10 = 9$ (стр.) — перепечатывает первая машинистка за 1 ч;

6) $9 \cdot 6 = 54$ (стр.) — надо дать первой машинистке;

7) $90 - 54 = 36$ (стр.) — надо дать второй машинистке.

Ответ. 54 и 36 страниц.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **21–27**. С задания **21**, для которого ответ виден из рисунка, можно начать обсуждение способа решения задач нового типа и способа записи их решения.

Решения и комментарии

38. Объясните, как разделить число 24 в отношении 1 : 2 : 3.

Решение. Число 24 делится в отношении 1 : 2 : 3 следующим образом:

$$\frac{24 \cdot 1}{1+2+3} = 4,\ \frac{24 \cdot 2}{1+2+3} = 8,\ \frac{24 \cdot 3}{1+2+3} = 12.$$

Этот способ решения учащиеся должны освоить, после чего можно записать более простое решение:

1) $\frac{24 \cdot 1}{1+2+3} = 4$ — первое число (1 часть);

2) $4 \cdot 2 = 8$ — второе число (2 части);

3) $4 \cdot 3 = 12$ — третье число (3 части).

Ответ. 4, 8, 12.

39. Первая машинистка печатает 10 страниц в час, вторая — 8 страниц в час. Как разделить между ними рукопись в 90 страниц, чтобы они закончили работу одновременно?

Решение. *I способ.*

1) $10 + 8 = 18$ (стр.) — печатали за 1 ч обе машинистки при совместной работе;

2) $90 : 18 = 5$ (ч) — время совместной работы;

3) $5 \cdot 10 = 50$ (стр.) — надо дать первой машинистке;

4) 90 – 50 = 40 (стр.) — надо дать второй машинистке.

II способ. Число страниц надо разделить в отношении 10 : 8:

$$\frac{90 \cdot 10}{10 + 8} = 50 \text{ (стр.) и } 90 - 50 = 40 \text{ (стр.).}$$

Ответ. 50 и 40 страниц.

Замечание. Второй способ решения задачи **39** является всего лишь краткой записью первого.

41. Скорость велосипедиста в 5 раз больше скорости пешехода. Однажды они отправились одновременно навстречу друг другу из пунктов, расстояние между которыми 30 км. Какой путь проедет велосипедист до встречи с пешеходом?

Решение. Так как скорость велосипедиста в 5 раз больше скорости пешехода, то за одно и то же время движения (до встречи) он проедет в 5 раз больше, чем пройдёт пешеход. Разделим 30 км в отношении 5 : 1.

1) $\frac{30 \cdot 1}{5 + 1}$ = 5 (км) — путь пешехода;

2) 30 – 5 = 25 (км) — путь велосипедиста.

Ответ. 25 км.

42. Мотоциклист может проехать расстояние между пунктами за 2 ч, а велосипедист — за 6 ч. Однажды они одновременно отправились навстречу друг другу из этих пунктов. Сколько километров проехал каждый до встречи, если расстояние между пунктами 60 км? Решите задачу двумя способами.

Решение. *I способ.*

1) 60 : 2 = 30 (км/ч) — скорость мотоциклиста;

2) 60 : 6 = 10 (км/ч) — скорость велосипедиста;

3) 30 + 10 = 40 (км/ч) — скорость сближения;

4) 60 : 40 = $\frac{3}{2}$ (ч) — время сближения;

5) 30 · $\frac{3}{2}$ = 45 (км) — путь мотоциклиста;

6) 60 – 45 = 15 (км) — путь велосипедиста.

Замечание. Для нахождения времени сближения велосипедиста и мотоциклиста учащиеся могут решить задачу «на совместную работу»:

1) $1 : 2 = \frac{1}{2}$ (пути) — проезжает мотоциклист за 1 ч;

2) $1 : 6 = \frac{1}{6}$ (пути) — проезжает велосипедист за 1 ч;

3) $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ (пути) — проезжают мотоциклист и велосипедист за 1 ч;

4) $1 : \frac{2}{3} = \frac{3}{2}$ (ч) — время сближения.

II способ. Из условия задачи следует, что скорость мотоциклиста в 6 : 2 = 3 (раза) больше скорости велосипедиста, поэтому мотоциклист проедет путь в 3 раза больший. Осталось 60 км разделить в отношении 3 : 1, обратном отношению 2 : 6.

1) $\frac{60 \cdot 1}{3+1} = 15$ (км) — путь велосипедиста;

2) 60 – 15 = 45 (км) — путь мотоциклиста.

Ответ. 15 км и 45 км.

Экономия в вычислениях при таком способе решения задачи **42** очевидна.

43. Над выполнением задания 3 дня работала первая бригада из 5 плотников и 4 дня вторая бригада из 6 плотников. За работу заплатили 39 000 р. Какую сумму получит первая бригада, если все плотники работали с одинаковой производительностью?

Решение. Первая бригада затратила $3 \cdot 5 = 15$ (человеко-дней), а вторая — $4 \cdot 6 = 24$ (человека-дня). Деньги надо разделить в отношении 15 : 24 = 5 : 8. Первая бригада получит $\frac{39000 \cdot 5}{5+8} = 15\,000$ (р.)

Ответ. 15 000 р.

Измерение объёма работы в человеко-днях весьма желательно, так как это помогает готовить учащихся к введению обратно пропорциональных величин (в данном случае — между числом работающих и временем выполнения всей работы).

А пока можно спросить у нескольких учащихся: Что означает 24 человеко-дня? Учащиеся должны понимать, что это объём работы, который может выполнить 1 человек за 24 дня, или 2 человека за 12 дней, или 3 человека за 8 дней, или 4 человека за 6 дней и т. д. При этом, конечно же, имеется в виду, что все работники работают с одинаковой производительностью, и метод расчётов имеет разумные границы применимости. Например, если 2 работника вырыли колодец за 12 дней, то затрачено 24 человеко-дня, но это вряд ли означает, что 24 человека выроют колодец за 1 день, так как в этом случае трудно обеспечить работой всех работников при рытье одного колодца.

44. *Из «Арифметики» А. П. Киселёва.* в) Разделить 125 на такие части, чтобы первая часть относилась ко второй, как 2 : 3, вторая к третьей, как 4 : 5, а третья к четвёртой, как 6 : 11.

д) На железной дороге работало 3 артели; в первой артели было 27 рабочих, во второй — 32, в третьей — 15; первая артель работала 20 дней, вторая — 18, третья — 16; все три артели получили за работу 4068 р. Сколько придётся получить каждой артели?

Решение. в) Сначала преобразуем два первых отношения так, чтобы второй член первого отношения был равен первому члену второго. Затем сделаем второй член второго отношения равным первому члену третьего отношения:

I : II	II : III	III : IV
2 : 3	4 : 5	6 : 11
8 : 12	12 : 15	
16 : 24	24 : 30	30 : 55

Итак, осталось 125 разделить в отношении 16 : 24 : 30 : 55. Получим

$$\frac{125\cdot 16}{16+24+30+55} = 16; \qquad \frac{125\cdot 24}{16+24+30+55} = 24;$$

$$\frac{125\cdot 30}{16+24+30+55} = 30; \qquad \frac{125\cdot 55}{16+24+30+55} = 55.$$

д) При решении этой задачи можно ввести единицу измерения объёма работы — «человеко-день».

1) $27 \cdot 20 = 540$ (человеко-дней) — затратила I артель;

2) $32 \cdot 18 = 576$ (человеко-дней) — затратила II артель;

3) $15 \cdot 16 = 240$ (человеко-дней) — затратила III артель.

Теперь разделим 4068 р. в отношении $540 : 576 : 240 = 45 : 48 : 20$:

4) $\frac{4068 \cdot 45}{45 + 48 + 20} = 1620$ (р.) — получит I артель;

5) $\frac{4068 \cdot 48}{45 + 48 + 20} = 1728$ (р.) — получит II артель;

6) $\frac{4068 \cdot 20}{45 + 48 + 20} = 720$ (р.) — получит III артель.

Ответ. 1620 р., 1728 р., 720 р.

Промежуточный контроль. С–2, Т–3.

1.4. Пропорции

В данном пункте вводится понятие пропорции и соответствующая терминология: крайние и средние члены пропорции, формулируется основное свойство пропорции. Показывается два способа решения пропорций. При этом главным для них должен стать способ решения, опирающийся на основное свойство пропорции.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **28–29**.

Решения и комментарии

59. Докажите, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то: б) $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$; в) $\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$.

Здесь предполагается, что числа a, b, c и d отличны от нуля.

Доказательство. б) Так как $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то по основному свойству пропорции верно равенство $a \cdot d = b \cdot c$. Разделив это равенство на $a \cdot c$, получим, что верно равенство $\frac{d}{c} = \frac{b}{a}$, что и требовалось доказать.

в) Решение этого задания надо показать учащимся не ради выполнения некоторой последовательности шагов, приводящих к правильному ответу, а для того, чтобы показать им, как они могли бы действовать сами в аналогичной ситуации, какие именно шаги нужно предпринять, чтобы доказать требуемое. Было бы неправильным показать учащимся только способ доказательства и не сказать ни слова о том, как этот способ может быть получен. А он может быть получен при помощи следующих рассуждений.

Проведём анализ. Для того чтобы было верно равенство

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}, \tag{1}$$

должны быть верными равенства

$$(a + c) \cdot d = (b + d) \cdot c; \tag{2}$$

$$a \cdot d + c \cdot d = b \cdot c + c \cdot d; \tag{3}$$

$$a \cdot d = b \cdot c; \tag{4}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \tag{5}$$

Но равенство (5) верно по условию задачи. Теперь проведём доказательство утверждения «в» (синтез). Умножив равенство (5) на $b \cdot d$, получим, что верно равенство (4). Прибавив в равенстве (4) по $c \cdot d$ к левой и правой частям, получим, что верно равенство (3). Вынеся общие множители за скобки в равенстве (3), получим, что верно равенство (2). Разделив равенство (2) на $(b + d) \cdot d$, получим, что верно равенство (1), что и требовалось доказать.

Замечание. Важно подчеркнуть, что переход от равенства (1) к равенству (5) не является доказательством равенства (1). Эту часть решения называют анализом. Это поиск доказательства. А доказательством является рассуждение, которое от известного равенства (5) приводит к доказываемому равенству (1). Эту часть рассуждения называют синтезом.

Задания **59 (в, г)** не являются обязательными для всех учащихся. Они предназначены для демонстрации решения учителем и приучения учащихся к поиску доказательства с помощью анализа и синтеза.

Отметим для учителя, что в дальнейшем отношения будут рассматриваться для любых рациональных чисел и тогда в равенстве «в» надо ещё потребовать, чтобы $b + d \neq 0$.

Докажем ещё, что если $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ и $b \neq d$, то $\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b}$.

Проведём анализ. Для того чтобы было верно равенство

$$\frac{a - c}{b - d} = \frac{a}{b}, \tag{6}$$

должны быть верными равенства

$$b \cdot (a - c) = a \cdot (b - d); \tag{7}$$

$$a \cdot b - b \cdot c = a \cdot b - a \cdot d; \tag{8}$$

$$-b \cdot c = -a \cdot d; \tag{9}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \tag{10}$$

Теперь проведём доказательство (синтез): так как равенство (10) верно по условию задачи, то, умножив его на $-b \cdot d$, получим равенство (9). Прибавив в равенстве (9) по $a \cdot b$ к левой и правой частям, получим, что верно равенство (8). Вынеся общие множители за скобки в равенстве (8), получим, что верно равенство (7). Разделив равенство (7) на $(b - d) \cdot b$, получим, что верно равенство (6), что и требовалось доказать.

Промежуточный контроль. С–3, Т–4.

1.5. Прямая и обратная пропорциональность

В данном пункте вводятся понятия прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин, показываются способы решения задач на прямую и обратную пропорциональность.

Формировать понятия прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин надо одновременно, но чтобы избежать путаницы при оформлении решений, задачи на прямую и обратную пропорциональность лучше рассмотреть на разных уроках, используя примеры из учебника и рабочей тетради.

При изучении нового материала учащиеся должны познакомиться с двумя важнейшими зависимостями, научиться определять вид зависимости по условию задачи и составлять пропорцию. Надо стремиться к тому, чтобы учащиеся объясняли, почему зависимость между двумя величинами является прямой или обратной пропорциональностью, но часто записывать подробное объяснение не следует. Можно ограничиться использованием стрелок для обозначения вида зависимости, как это сделано в учебнике. Если две величины прямо пропорциональны, то стрелки будут одинаково направлены. Если величины обратно пропорциональны, то стрелки будут противоположно направлены.

В данном пункте много устных заданий на формирование у учащихся понятий прямо пропорциональных и обратно пропорциональных величин. В результате их обсуждения надо подвести учащихся к пониманию того, что если величины a, b и c связаны формулой $a \cdot b = c$ и величина a постоянна, то величины b и c прямо пропорциональны, если величина b постоянна, то величины a и c прямо пропорциональны. Разумеется, к такому выводу на буквах a, b и c (v, t и s) нужно приходить после рассмотрения конкретных примеров (задания **68–70**) и записи на доске равенств:

$$\begin{gathered}\textit{количество} \cdot \textit{цена} = \textit{стоимость},\\ \textit{скорость} \cdot \textit{время} = \textit{расстояние}, \qquad (*)\\ \textit{производительность} \cdot \textit{время} = \textit{работа}.\end{gathered}$$

При этом в каждом случае нужно выяснять, какая из трёх величин постоянна. Результатом обсуждения должен быть вывод, что если в любом из равенств (*) постоянным является множитель, то произведение прямо пропорционально другому множителю; если постоянным является произведение, то множители обратно пропорциональны.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **30–35**. В сильном классе или в работе с хорошо мотивированными к учению школьниками можно использовать задания **36–42**, посвященные сложным задачам на прямую и обратную пропорциональность (в этих задачах более двух величин).

Решения и комментарии

86. а) За одно и то же время токарь делает 6 деталей, а его ученик — 4 детали. Сколько деталей сделает ученик токаря за то же время, за которое токарь сделает 27 деталей?

Решение. Запишем коротко условия задачи:

Токарь	$\downarrow$	6 дет.	27 дет.	$\downarrow$
Ученик		4 дет.	x дет.	

Здесь количества деталей в первом случае (6 и 4) прямо пропорциональны производительности труда токаря и ученика (при одинаковом времени работы). Количества деталей во втором случае (27 и x) прямо пропорциональны производительности труда токаря и ученика (при одинаковом, но другом времени работы), поэтому пары значений (6 и 4) и (27 и x) одной и той же величины «количество деталей» прямо пропорциональны.

Однако это обоснование будет сложным для школьников. Достаточно, если они скажут, что 6 больше, чем 4, во столько же раз, во сколько 27 больше, чем x, и составят пропорцию $\frac{6}{4} = \frac{27}{x}$, решив которую, получат, что $x = 18$.

Ответ. 18 деталей.

89. а) Шесть маляров выполнят работу за 5 дней. Сколько еще маляров надо пригласить, чтобы все вместе они выполнили то же задание за 3 дня?

Решение. *I способ.* Сначала учащиеся должны определить, сколько маляров выполнят работу за 3 дня.

$\downarrow$	6 маляров	—	5 дней	$\uparrow$
	x маляров	—	3 дня	

Так как объём работы постоянный, то время работы обратно пропорционально количеству маляров. Составим пропорцию:

$$\frac{6}{x} = \frac{3}{5},$$

откуда получим, что $x = 10$.

Итак, нужно иметь 10 маляров, т. е. надо пригласить 10 – 6 = 4 маляра.

Задачу можно решить с помощью человеко-дней.

II способ. На всю работу требуется $5 \cdot 6 = 30$ человеко-дней. Чтобы выполнить работу за 3 дня нужно иметь 30 : 3 = 10 маляров, т. е. надо пригласить 10 – 6 = 4 маляра.

Ответ. 4 маляра.

Промежуточный контроль. Т–5, К–1.

1.6. Понятие о проценте

В данном пункте вводится понятие процента, рассмотрены способы решения основных задач на проценты, работа с которыми будет продолжена при изучении следующего пункта учебника. Обратим внимание на важность освоения нового понятия каждым школьником.

Все задачи данного пункта решаются на основе содержательного понимания процента как сотой части числа, т. е. как задачи на дроби. При нахождении нескольких процентов числа или числа по его процентам первый шаг заключается в нахождении одного процента.

К решению задач на проценты учащиеся вернутся еще неоднократно, поэтому в данный момент желательно добиться понимания идеи решения трех основных задач на проценты и не решать более сложных задач.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **43–48**. Задания **43–44** позволяют сформировать понятие процента с опорой на наглядные представления.

Решения и комментарии

108. Папа потратил 2000 р. на подарки маме и нам — детям. На подарок маме он потратил 40% этой суммы, мне и моей сестре по 30%. Все ли деньги потратил папа? Нет ли в задаче лишних данных?

Решение. При решении этой задачи учащиеся могут вычислять стоимости подарков. Это полезное упражнение, после которого они лучше оценят простое решение: 40 + 30 + 30 = 100 (%) — все деньги потрачены, условие «2000 р.» лишнее.

При решении следующей задачи можно показать учащимся, что некоторые задачи на проценты можно решить, не вычисляя одного процента. Это хорошая «прививка» против формирования шаблонного мышления.

118. а) Посадили 50 семян, 47 из них взошли. Определите процент всхожести семян.

б) В школе 400 учащихся, 12 из них учатся на «5». Сколько процентов учащихся школы учится на «5»?

Решение. а) Если считать, что процент всхожести семян не зависит от числа посаженных семян, то если бы посадили в 2 раза больше семян (100), то из них взошло бы в 2 раза больше — 94. Процент всхожести семян равен 94.

б) На каждые 100 учащихся приходится 3 отличника, поэтому на «5» учится 3 % учащихся школы.

Ответ. а) 94 %; б) 3 %.

119. а) Маша прочитала 120 страниц, и ей ещё осталось прочитать 130 страниц книги. Сколько процентов всех страниц она прочитала?

Решение. Надо найти процентное отношение 120 к сумме 120 + 130 = = 250:

$$\frac{120 \cdot 100}{250} = 48\ (\%).$$

Ответ. 48 %.

1.7. Задачи на проценты

Данный пункт учебника посвящён трём основным задачам на проценты:

- найти несколько процентов числа;
- найти число по нескольким его процентам;
- найти, сколько процентов составляет одно число от другого.

Каждую из этих задач советуем решать без пропорции, так как использование пропорции быстро переводит решение задачи к применению шаблона, что не способствует развитию мышления. Кроме того, применение пропорций при решении сложных задач на проценты весьма затруднительно.

Этот пункт является продолжением предыдущего. Учащиеся должны понять, что задачи на проценты являются задачами на дроби, поэтому их можно решать известным им способом — умножением (делением) на соответствующую обыкновенную дробь. Учитывая, что после изучения десятичных дробей они будут умножать (делить) на десятичную дробь, с новым способом решения их следует познакомить, но не стоит требовать, чтобы задачи решались только этим способом. Новыми для учащихся будут задачи на увеличение (уменьшение) числа на несколько процентов (здесь можно использовать задания **58–66 (РТ)**).

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **49–66**.

Решения и комментарии

127. а) Туристы прошли 75 % маршрута, и им осталось пройти ещё 5 км. Какова длина маршрута?

Решение. Для решения этой задачи полезно выполнить рисунок 1.

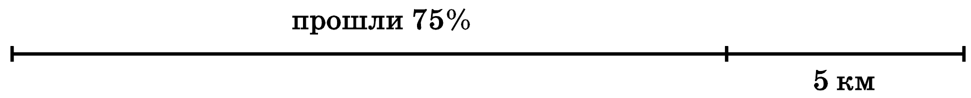

Рис. 1

Учащиеся должны запомнить, что для решения этой и многих других задач на проценты надо одно и то же количество выразить двумя способами — в километрах (метрах, килограммах и т. п.) и в процентах от некоторой величины.

1) $100 - 75 = 25$ (%) — часть маршрута, которую осталось пройти (приходится на 5 км);

2) $\frac{5 \cdot 100}{25} = 20$ (км) — длина всего маршрута.

Ответ. 20 км.

128. а) Что больше: 30 % от 40 или 40 % от 30?

Решение. 30 % от 40 составляют $\frac{40 \cdot 30}{100}$, а 40 % от 30 составляют $\frac{30 \cdot 40}{100}$. Так как $\frac{40 \cdot 30}{100} = \frac{30 \cdot 40}{100}$, то 30 % от 40 равны 40 % от 30.

135. Мясо при варке теряет 40 % своей массы.

а) Сколько варёного мяса получится из 6 кг свежего?

б) Сколько свежего мяса нужно взять, чтобы получить 6 кг варёного?

Решение. а) Мясо при варке теряет 40 % от 6 кг, т. е. $\frac{6 \cdot 40}{100} = 2\frac{2}{5}$ (кг). Варёное мясо весит $6 - 2\frac{2}{5} = 3\frac{3}{5}$ (кг).

б) 6 кг варёного мяса составляют 100 – 40 = 60 (%) от массы свежего мяса, следовательно, нужно взять $\frac{6 \cdot 100}{60} = 10$ (кг) свежего мяса.

Ответ. а) $3\frac{3}{5}$ кг; б) 10 кг.

Промежуточный контроль. С–4, С–5, Т–6, Т–7.

1.8. Круговые диаграммы

В данном пункте вводится понятие круговой диаграммы и на примере показывается, как строить круговую диаграмму. Умение читать и строить круговые диаграммы является важным практическим умением. Поэтому учащиеся должны научиться читать круговые диаграммы, строить простейшие из них для случаев, аналогичных разобранным в учебнике.

Подчеркнём, что учащиеся привыкли работать с углами, градусная мера которых не больше 180°. Однако здесь можно сказать, что при построении диаграмм удобно рассматривать угол, составленный из двух развёрнутых углов и содержащий 360°. Надо посоветовать учащимся при построении диаграмм начинать с построения меньших углов, которые нетрудно построить с помощью транспортира. В этом случае им не придётся строить самый большой угол, который может содержать больше 180°.

РТ. Лучшему усвоению материала данного пункта учебника будет способствовать использование заданий **67–69**.

Решения и комментарии

139. На круговой диаграмме (рис. 2) показан процентный состав населения города N. Сколько мужчин, женщин и детей живет в городе N, если всего в нем 48 тыс. жителей?

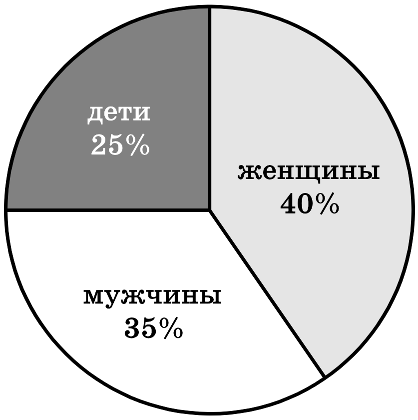

Рис. 2

Решение.

1) $\frac{48000 \cdot 25}{100}$ = 12 000 (чел.) — детей;

2) $\frac{48000 \cdot 35}{100}$ = 16 800 (чел.) — мужчин;

3) $\frac{48000 \cdot 40}{100}$ = 19 200 (чел.) — женщин.

Ответ. 12 000 детей, 16 800 мужчин, 19 200 женщин.

141. Постройте круговую диаграмму, отражающую результаты выполнения контрольной работы по русскому языку в 7 классе: «5» получили 3 человека, «4» — 12 человек, «3» — 15 человек («2» и «1» нет).

Решение. Сначала нужно найти количество учащиеся, писавших контрольную работу и получивших отметки «5», «4», «3».

1) 3 + 12 + 15 = 30 (чел.) — писали контрольную работу;

2) 360° : 30 = 12° — величина угла, соответствующая одному человеку;

3) 12° · 3 = 36° — величина угла, соответствующая учащимся, получившим «5»;

4) 12° · 12 = 144° — величина угла, соответствующая учащимся, получившим «4»;

5) 12° · 15 = 180° — величина угла, соответствующая учащимся, получившим «3».

Диаграмма изображена на рисунке 3.

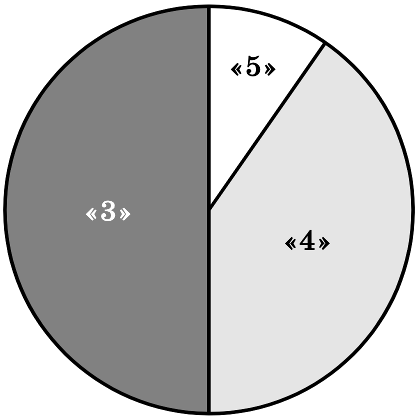

Рис. 3

Промежуточный контроль. Т–8, К–2.

Дополнения к главе 1

1. Задачи на перебор всех возможных вариантов

Идея решения задачи с помощью перебора всех возможных вариантов показывается в данном пункте на конкретных примерах. Учащиеся должны понимать, что перебор всех возможных вариантов или подсчёт их числа надо осуществлять по определённому плану. Иначе можно потерять часть вариантов. Похожие задачи уже встречались в 5 классе, теперь их разбор требуется для подготовки к решению задач на вычисление вероятностей случайных событий.

Решения и комментарии

145. Запишите все двузначные числа, в записи которых используются цифры 0, 1, 5: а) без повторения; б) с повторением.

Решение. а) На первое место поставим 1 или 5 (0 нельзя поставить в разряде десятков) — это даёт два случая. В каждом из них на второе место можно поставить одну из двух оставшихся цифр. Итого $2 \cdot 2 = 4$ числа: 10, 15, 50, 51.

б) На первое место поставим 1 или 5 — это даёт два случая. В каждом из них на второе место можно поставить одну из трёх цифр 0, 1 или 5. Итого $2 \cdot 3 = 6$ чисел: 10, 11, 15, 50, 51, 55.

А можно воспользоваться результатом предыдущего задания: к четырём числам, найденным выше, добавятся числа 11 и 55 (двузначного числа 00 нет). Итого 6 чисел: 10, 11, 15, 50, 51, 55.

Ответ. а) 10, 15, 50, 51; б) 10, 11, 15, 50, 51, 55.

146. Сколько двузначных чисел можно записать цифрами 9, 8, 7:

а) с повторением цифр; б) без повторения цифр?

Если предыдущие задания учащиеся могли выполнять, терпеливо выписывая все возможные варианты, то здесь можно ограничиться подсчетом числа возможных вариантов.

Решение. а) На первое место поставим одну из трёх имеющихся цифр — это дает три случая. В каждом из них на второе место можно поставить одну из трёх имеющихся цифр. Итого $3 \cdot 3 = 9$ чисел.

б) На первое место поставим одну из трёх имеющихся цифр — это даёт три случая. В каждом из них на второе место можно поставить одну из двух оставшихся цифр (повторять цифру, стоящую на первом месте нельзя). Итого $3 \cdot 2 = 6$ чисел.

148. Четыре подружки купили 4 билета в кино. Сколькими различными способами они могут занять свои места в зрительном зале?

Решение. Первое место может занять любая из четырёх подруг. В каждом из этих четырёх случаев второе место может занять любая из трех оставшихся подруг. Тогда два первых места можно занять $4 \cdot 3$ способами, а в каждом из них на третье место можно посадить одну из двух оставшихся подруг. Три места можно занять $4 \cdot 3 \cdot 2$ способами. Четвёртое место займёт оставшаяся подруга. Подруги могут занять свои места в зрительном зале $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ различными способами.

Ответ. 24 способами.

149. Сколько двузначных; трёхзначных; четырёхзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 без повторения?

Решение. Без повторения цифр можно составить:

$5 \cdot 4 = 20$ двузначных чисел,

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ трёхзначных чисел,

$$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120 \text{ четырёхзначных чисел.}$$

Ответ. 20 двузначных, 60 трёхзначных, 120 четырёхзначных чисел.

150. Сколько двузначных; трёхзначных; четырёхзначных чисел можно составить, используя цифры 1, 2, 3, 4, 5 с повторением?

Решение. С повторением цифр можно составить:

$$5 \cdot 5 = 25 \text{ двузначных чисел,}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \text{ трёхзначных чисел,}$$

$$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ четырёхзначных чисел.}$$

Ответ. 25 двузначных, 125 трёхзначных, 625 четырёхзначных чисел.

151. а) Все четырёхзначные числа, записанные цифрами 1, 2, 3, 4 без повторения, занумеровали в порядке возрастания чисел. Какой номер имеет число 4312?

б) Все пятизначные числа, записанные цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, занумеровали в порядке возрастания чисел. Какой номер имеет число 54 312?

в) Все пятизначные числа, записанные цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, выписывают в порядке возрастания. Сколько чисел в этом списке? Каким по счёту в этом списке будет число 54 231?

Решение. а) Имеется $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ четырёхзначных числа, записанных цифрами 1, 2, 3, 4 без повторения. Число 4312 стоит перед последним самым большим числом 4321, его номер 23.

б) Имеется $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ пятизначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения. Число 54312 стоит перед последним самым большим числом 54 321, его номер 119.

в) В этом списке 120 чисел (см. задание б). Выпишем все числа в этом списке начиная с числа 54 231: 54 231, 54 312, 54 321.

Число 54 231 будет по счёту 118-м.

Ответ. а) 23; б) 119; в) 120, 118-м.

152. У круглого стола поставили четыре стула. Сколькими способами можно рассадить на эти стулья: а) четырёх детей; б) трёх детей; в) двух детей?

Решение. а) Четырёх детей можно посадить $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ способами (решение аналогично решению задачи **148**);

б) трёх детей можно посадить $4 \cdot 3 \cdot 2 = 24$ способами;

в) двух детей можно посадить $4 \cdot 3 = 12$ способами.

Ответ. а) 24 способами; б) 24 способами; в) 12 способами.

153. Мальчика и двух девочек надо рассадить за круглым столом с четырьмя стульями так, чтобы девочки не оказались рядом. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Первую девочку можно посадить на любой из четырёх стульев (рис. 4), а вторую — напротив (чтобы они не оказались рядом). Тогда в каждом из этих четырёх случаев мальчика можно посадить только двумя способами. Итого имеется $4 \cdot 2 = 8$ способов посадить детей в соответствии с условиями задачи.

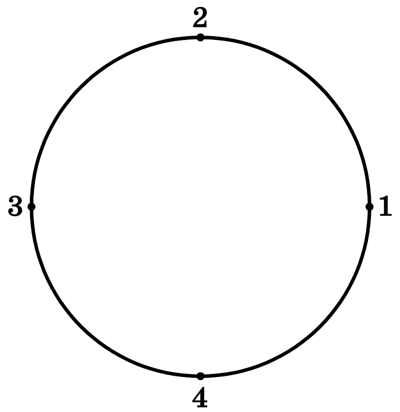

Рис. 4

Ответ. 8 способами.

155. Бросили два игральных кубика. На первом выпало 3 очка, на втором — 6 очков. Сколькими различными способами может выпасть сумма в 9 очков? Сколькими различными способами могут выпасть очки на этих кубиках?

Решение. Будем считать, что выпадению 3 очков на первом кубике и 6 очков на втором соответствует двузначное число 36. Тогда всем возможным случаям выпадения на двух кубиках в сумме 9 очков соответствуют четыре числа: 36, 45, 54, 63, т. е. сумма в 9 очков выпадает четырьмя различными способами. А всего может быть $6 \cdot 6 = 36$ способов.

156. а) На окружности отметили 6 точек (рис. 5). Сколько получится отрезков, если соединить каждую точку с каждой?

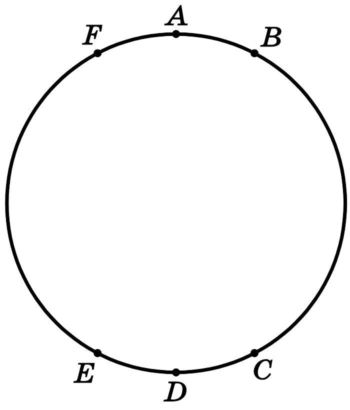

Рис. 5

Решение. На рисунке 5 на окружности отмечены по порядку 6 точек: *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*. Из точки *A* можно провести 5 отрезков: ***AB***, *AC*, *AD*, *AE*, *AF*. Из точки *B* можно провести 5 отрезков: ***BA***, *BC*, *BD*, *BE*, *BF*. Из оставшихся точек тоже можно провести по 5 отрезков, но всех отрезков будет не $6 \cdot 5 = 30$, а $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$, так как каждый из отрезков в этих списках будет учтен дважды (как выше отрезок *AB*).

Ответ. 15 отрезков.

158. Несколько приятелей при встрече обменялись рукопожатиями. Только Вася Угрюмов был не в духе и пожал руку не всем своим приятелям. Всего было 13 рукопожатий. Скольким приятелям Вася пожал руку?

Решение. Сначала заметим, что если n приятелей пожмут друг другу руки по одному разу, то рукопожатий будет $\frac{n(n-1)}{2}$ (каждый из n человек жмёт руку всем, кроме себя, т. е. $(n - 1)$ приятелю, но каждое рукопожатие посчитано дважды). Если 5 приятелей (без Васи) пожмут друг другу руки по одному разу, то рукопожатий будет 10. У нас 13 рукопожатий, значит, Вася пожал руку $13 - 10 = 3$ (раза). Больше чем 5 приятелей у Васи быть не может, так как если у Васи 6 приятелей, то у них (без Васи) число рукопожатий равно 15, что больше, чем 13.

Ответ. Трём приятелям.

159. Несколько приятелей при встрече обменялись рукопожатиями. Только Петя Веселов был так рад встрече, что дважды пожал руку некоторым из своих приятелей (но не всем). Всего было b рукопожатий. Скольким приятелям Петя пожал руку дважды?

Решите задачу, если: а) $b = 17$; б) $b = 18$, в) $b = 19$.

Решение. Если 5 приятелей пожмут друг другу руки по одному разу, то рукопожатий будет 10 (задача **158**). Даже если бы Петя пожал руки дважды четырём приятелям, то рукопожатий стало бы 14, это меньше 17. Следовательно, приятелей больше 5.

Если 6 приятелей пожмут друг другу руки по одному разу, то рукопожатий будет 15.

Петя пожал руки дважды: в случае а) двум приятелям, в случае б) трём приятелям, а в случае в) четырём приятелям.

Если же 7 (или больше) приятелей пожмут друг другу руки по одному разу, то рукопожатий будет 21 (или больше). Поэтому приятелей не могло быть больше 6.

Ответ. а) Двум; б) трём; в) четырём.

2. Вероятность события

В данном пункте вводятся понятия события и вероятности события (классическое определение вероятности). При рассмотрении примера 3 выясняется вопрос о справедливости (несправедливости) игры. Для ответа на этот вопрос сравниваются вероятности выигрыша для каждого из игроков.

Решения и комментарии

163. *Задачи Даламбера.* а) Монета бросается два раза. Какова вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб?

б) Монета бросается три раза. Какова вероятность того, что герб выпадет по крайней мере один раз?

Решение. а) Все возможные результаты двух бросков монеты запишем так: ГГ, ГР, РГ, РР (Г — герб, Р — решка). Герб выпадет в трёх случаях из четырёх, т. е. вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб, равна $\frac{3}{4}$.

б) Все возможные результаты трёх бросков монеты запишем так: ГГГ, ГГР, ГРГ, РГГ, РРГ, РГР, ГРР, РРР. Герб выпадет в семи случаях из восьми, т. е. вероятность того, что хотя бы один раз выпадет герб, равна $\frac{7}{8}$.

Ответ. а) $\frac{3}{4}$; б) $\frac{7}{8}$.

Замечание. Задачу Даламбера можно обобщить для n бросков монеты. Дело в том, что при n бросках монеты будет $\underbrace{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}_{n} = 2^n$ различных результатов. Все они, кроме одного $\underbrace{\text{РР...Р}}_{n}$, благоприятствуют событию A: «хотя бы один раз выпадет герб». Поэтому вероятность события A равна $\frac{2^n-1}{2^n}$.

167. На трёх карточках написали буквы Е, Н, Т, положили карточки на стол буквами вниз в произвольном порядке. Какова вероятность того, что после переворачивания карточек получится слово «НЕТ»?

Решение. Учащиеся могут составить список всех возможных «слов»: ЕНТ, ЕТН, ТЕН, ТНЕ, НЕТ, НТЕ, но проще подсчитать, сколькими способами их можно составить: всего различных «слов» $3\cdot 2\cdot 1 = 6$. Вероятность получения слова «НЕТ» равна $\frac{1}{6}$.

Ответ. $\frac{1}{6}$.

173. Бросают два игральных кубика. Какова вероятность события:
а) *A:* «сумма очков равна 2»; б) *B:* «сумма очков равна 10»?

Решение. Различных результатов при броске двух кубиков $6\cdot 6 = 36$.

а) Сумма 2 образуется одним способом: $1 + 1$, поэтому вероятность события A равна $\frac{1}{36}$.

б) Сумма 10 образуется только тремя способами: $5 + 5$, $4 + 6$, $6 + 4$, поэтому вероятность события B равна $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Чтобы учащиеся поняли, что суммы 4 + 6 и 6 + 4 различны, надо представить себе, что кубики были разных цветов.

Ответ. а) $\frac{1}{36}$; б) $\frac{1}{12}$.

174. В первом ряду микроавтобуса имеется только 3 места. На них собираются сесть двое мужчин и одна женщина. Какова вероятность того, что мужчины окажутся рядом?

Решение. Различных способов занять места на первых сидениях 6:

М м ж   м ж М   ж м М

М ж м   м М ж   ж М м

Мужчины окажутся рядом в четырёх из них, следовательно, вероятность того, что они окажутся рядом, равна $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

Тот же ответ можно получить проще. Женщина может занять место тремя способами. Мужчины окажутся рядом в двух из них, следовательно, вероятность того, что они окажутся рядом, равна $\frac{2}{3}$.

175. Бросают две монеты. Если выпадут два орла, то выиграл 1-й, если выпадут орёл и решка, то выиграл 2-й. Справедлива ли эта игра?

Решение. Все возможные результаты бросков можно записать так: ОО, ОР, РО, РР. Их 4. Два орла (ОО) выпадают в одном случае, а орёл и решка — в двух (ОР и РО). Вероятность выпадения двух орлов $\frac{1}{4}$, а вероятность выпадения орла и решки равна $\frac{2}{4}$, что больше $\frac{1}{4}$. Игра не справедливая.

176. Бросают два игральных кубика. Если сумма очков 11 — выиграл 1-й, если сумма очков 12 — выиграл 2-й. Справедлива ли эта игра?

Решение. Число всех различных результатов равно $6 \cdot 6 = 36$. Сумма 11 образуется двумя различными способами: 5 + 6 и 6 + 5, а сумма 12 — одним: 6 + 6. Вероятность выигрыша первого игрока $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$, а вероятность выигрыша второго игрока равна $\frac{1}{36}$, т. е. меньше. Игра не справедливая.

178. Витя задумал число, записанное цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения. Коля пытается это число угадать. Какова вероятность того, что Коля угадает число с первого раза, если это число: а) двузначное; б) трёхзначное?

Решение. а) Двузначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, $5 \cdot 4 = 20$. Вероятность угадать одно из них $\frac{1}{20}$.

б) Трёхзначных чисел, записанных цифрами 1, 2, 3, 4, 5 без повторения, $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$. Вероятность угадать одно из них $\frac{1}{60}$.

Промежуточный контроль. С–6.

3. Исторические сведения

В данном пункте учебника приведены сведения из истории использования пропорций и процентов и происхождения принятых теперь способов записи пропорций и обозначения процентов. Имеется информация об учёных, внёсших вклад в становление теории вероятностей.

4. Занимательные задачи

В данном пункте учебника приведены занимательные задачи, связанные с пропорциями и процентами. Здесь же есть задачи, связанные с площадями фигур.

Решения и комментарии

180. Пруд зарастает лилиями — за неделю площадь, занятая лилиями, удваивается. За сколько недель пруд покрылся лилиями наполовину, если полностью он покрылся лилиями за 8 недель?

Решение. Ответ «за 4 недели» неверный, так как здесь нет прямой пропорциональности. Пруд покрылся лилиями наполовину за неделю до того момента, когда он полностью покрылся лилиями, т. е. за 7 недель.

Ответ. За 7 недель.

181. Некоторый вид бактерий размножается со скоростью 1 деление в минуту (каждую минуту каждая бактерия раздваивается). Если посадить 1 бактерию в пустой сосуд, то он наполнится за 1 ч. За какое время наполнится сосуд, если в него сначала посадить 2 бактерии?

Решение. Если посадим сразу две бактерии, то сэкономим 1 мин. Сосуд наполнится за 59 мин.

Ответ. 59 мин.

182. 3 курицы за 3 дня снесли 3 яйца. Сколько яиц снесут 12 куриц за 12 дней?

Решение. *I способ.* Запишем кратко условие задачи:

3 курицы — 3 дня — 3 яйца

Увеличим число кур в 4 раза, оставив без изменения число дней. Число яиц увеличится в 4 раза:

12 кур — 3 дня — 12 яиц

Теперь увеличим число дней в 4 раза, оставив без изменения число кур. Число яиц увеличится в 4 раза:

12 кур — 12 дней — 48 яиц

II способ. 3 курицы — 3 дня — 3 яйца

12 кур — 12 дней — x яиц

Число кур увеличилось в 12 : 3 = 4 раза. От этого число яиц увеличится в 4 раза. Число дней увеличилось в 12 : 3 = 4 раза. От этого число яиц еще раз увеличится в 4 раза: $x = 3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$.

Ответ. 48 яиц.

184. а) 3 маляра за 5 дней могут покрасить 60 окон. Сколько окон покрасят 5 маляров за 4 дня?

Решение. Запишем кратко условие задачи:

маляров	дней	окон
3	5	60
5	4	x

Число маляров увеличилось в $\frac{5}{3}$ раза, от этого число окон x увеличится в $\frac{5}{3}$ раза. Число дней уменьшилось в $\frac{5}{4}$, от этого число окон уменьшится в $\frac{5}{4}$ раза. Вычислим x:

$$x = 60 \cdot \frac{5}{3} : \frac{5}{4} = 80.$$

Итак, 5 маляров за 4 дня покрасят 80 окон.

Ответ. 80 окон.

188. *Старинная задача.* У хозяйки спросили: «Хорошо ли несутся ваши куры?» — «Считайте сами, — был ответ, — полторы курицы за полтора дня несут полтора яйца, а всего у меня 12 кур». Сколько яиц несут куры в день?

Решение. Запишем коротко условие задачи, учитывая, что $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

$\frac{3}{2}$ курицы	—	$\frac{3}{2}$ дня	—	$\frac{3}{2}$ яйца
12 кур	—	1 день	—	x яиц

Число кур увеличилось в $12 : \frac{3}{2} = 8$ раз. От этого число яиц увеличится в 8 раз. Число дней уменьшилось в $\frac{3}{2}$ раза. От этого число яиц уменьшится в $\frac{3}{2}$ раза. Вычислим x:

$$x = \frac{3}{2} \cdot 8 : \frac{3}{2} = 8.$$

Итак, в день куры несут 8 яиц.

Ответ. 8 яиц.

189. Зарплата в 100 условных единиц повысилась на 10%, потом ещё на 10%. На сколько процентов повысилась зарплата за 2 раза?

Решение. Учащиеся могут выполнить следующие вычисления:

1) $100 + 100 \cdot \frac{10}{100} = 110$ (у. е.) — зарплата после первого повышения;

2) $110 + 110 \cdot \frac{10}{100} = 121$ (у. е.) — зарплата после второго повышения;

3) $\frac{121 \cdot 100}{100} = 121$ (%) — первоначальной зарплаты составляет зарплата

после двух повышений;

4) 121 – 100 = 21 (%) — составило повышение зарплаты за 2 раза.

Ответ. На 21%.

Замечание. В пункте 4.8 будет показано, что подобные задачи можно решать по формуле сложных процентов:

1) $100 \cdot \left(1+\frac{10}{100}\right)^2 = 121$;

2) 121 – 100 = 21.

РТ. Разрезанию фигур на равные части и составлению фигур из нескольких равных фигур посвящён пункт 1 Дополнений к главе 5. Этот материал может оказаться полезным для общего развития учащихся и при подготовке их к олимпиадам, поэтому его можно изучать в несколько этапов, включая задачи из него в работу на уроке. Развитию понимания равенства геометрических фигур и умения перебирать все возможные варианты при решении задач будет способствовать использование заданий **70–75**.

Приведём решения двух из этих задач.

70(РТ). Разрежьте фигуру (рис. 6) на 4 равные части. Найдите 3 решения.

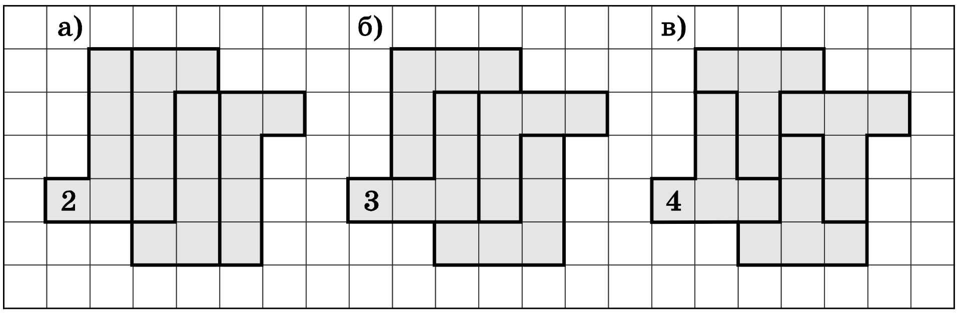

Рис. 6

Решение. Так как фигура состоит из 20 клеток, а резать её на равные части разрешается по линейкам клетчатой бумаги, то каждая из четырёх равных фигур будет содержать по 5 клеток, т. е. решение задачи сводится к выяснению вопроса: какими одинаковыми фигурами пентамино, состоящими из 5 клеток, можно покрыть данную фигуру. (Фигуры пентамино изображены на рисунке 137 учебника и имеют номера от 1 до 12, на которые мы будем ссылаться.)

На рисунке 6 изображены решения, полученные с помощью фигур 2, 3, 4 пентамино.

Ещё одно решение можно получить с помощью фигуры 12 пентамино, а с другими фигурами пентамино решений получить нельзя. На рисунке 6, *а* две центральные фигуры 2 можно расположить другим способом.

73(РТ). Разрежьте фигуру (рис. 7) на 8 равных частей.

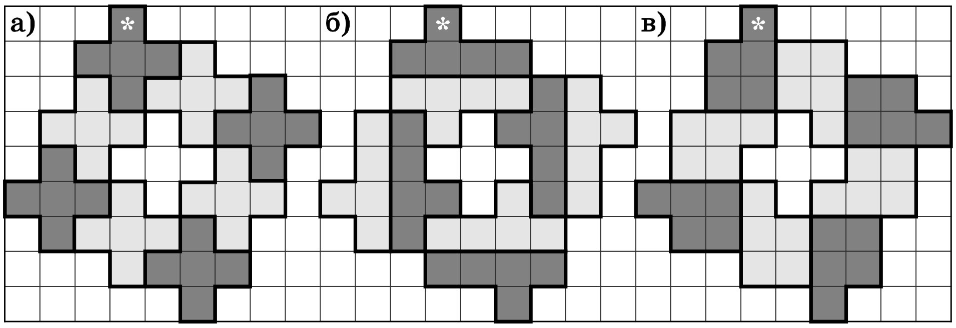

Рис. 7

а) Найдите 2 решения.   б)* Сколько решений имеет задача?

Решение. Так как фигура состоит из 40 клеток, а резать её на равные части разрешается по линейкам клетчатой бумаги, то каждая из восьми равных фигур будет содержать по 5 клеток. И здесь решение задачи сводится к выяснению вопроса: какими одинаковыми фигурами пентамино можно покрыть данную фигуру.

Клетку, отмеченную звездочкой, можно единственным способом занять каждой из фигур 5, 11, 12 (рис. 7) так, чтобы они покрыли и оставшуюся часть данной фигуры. Другими равными фигурами пентамино покрыть данную фигуру целиком невозможно. Следовательно, имеется только 3 решения.

Глава 2. Целые числа

В этой главе происходит расширение множества натуральных чисел до множества целых чисел. Вводятся отрицательные целые числа, изучаются сравнение целых чисел, арифметические действия с ними, затем законы сложения и умножения, правила раскрытия скобок, заключения в скобки и действия с суммами нескольких слагаемых. Лишь после этого рассматривается представление целых чисел на координатной оси.

Введение отрицательных чисел и правил действий с ними первоначально происходит на множестве целых чисел. Это позволяет сконцентрировать внимание учащихся на определении знака результата и выборе действия с модулями, а сами вычисления с модулями целых чисел — натуральными числами — к этому времени уже хорошо усвоены. Идею отрицательных чисел и правил действий с ними легче усвоить на целых числах, поэтому основная трудность здесь — это работа со знаками.

Схема изучения целых чисел такая же, как и при изучении натуральных чисел. Важно, чтобы учащиеся поняли, что новое в этой главе — это определение знака результата, а остальное — это действия с натуральными числами — модулями целых чисел.

В этой главе продолжается применение доказательных рассуждений. Доказательство законов сложения и умножения для целых чисел проводится на характерных числовых примерах с опорой на соответствующие законы для натуральных чисел.

При наличии учебных часов рассматривается тема «Фигуры на плоскости, симметричные относительно точки».

Цель изучения главы: сформировать у учащихся представление об отрицательных числах, научить их четырём арифметическим действиям с целыми числами.

2.1.Отрицательные целые числа

2.2. Противоположные числа. Модуль числа

Начать изучение нового материала можно с вводных уроков с использованием раздела «Подготовка к изучению целых чисел» (задания **76–87 (РТ)**). Цель предлагаемой работы заключается в создании опытной базы, в получении некоторых фактов для выигрышных и проигрышных очков. Рассмотрение достаточного числа примеров на подсчет выигрышных и проигрышных очков, ряда целых чисел приводит к тому, что учащиеся оказываются подготовленными к введению операций над целыми числами.

После проведённой работы учащиеся будут готовы к теоретическому обобщению полученных знаний, к изучению целых чисел и действий с ними.

В пункте 2.1 вводятся понятия целых отрицательных чисел, ряда целых чисел. В пункте 2.2 вводятся понятия противоположных чисел и модуля целого числа.

Особое внимание следует уделить заданиям **214–215** на упрощение записей чисел вида +(+2), +(–3) , –(+3), –(–3) и др., которые должны быть хорошо усвоены. С опорой на умения, формируемые при выполнении этих и аналогичных заданий из рабочей тетради, будут легче формироваться умения раскрывать скобки, перед которыми стоит знак «+» или знак «–». С первых пунктов главы 2 надо обратить внимание учащихся на необходимость заучивания изучаемых правил. Это даст дополнительную опору в вычислениях и будет способствовать развитию мышления и речи учащихся.

РТ. Лучшему усвоению идеи целых чисел и действий с ними будет способствовать использование заданий **76–87**. Часть этих заданий можно разобрать в классе, другую — использовать для домашних заданий. Надо постараться от чтения записей +2 и –3 как «2 выигрышных очка» и «3 проигрышных очка» плавно перейти к чтению их как «+2 очка» и «–3 очка» (мотивируя этот переход упрощением речи). Но опускать знак «+» не следует, так как для учащихся этот знак имеет определённый смысл, его полезно сохранять до изучения операций с целыми числами. Лишь после этого в учебнике сделаны специальные замечания, нацеленные на такое упрощение записи. При изучении пункта 2.2 можно использовать задания **88–92**.

Решения и комментарии

Задания **226–231** посвящены обобщению изученного и предотвращению обычного заблуждения учащихся, многие из которых считают, что число $–a$ всегда отрицательное.

227. Всегда ли модуль числа равен самому числу, т. е. $|a| = a$? Для каких чисел это равенство верно?

Ответ. Не всегда. Верно только для $a \geq 0$.

228. Всегда ли модуль числа равен противоположному числу, т. е. $|a| = –a$? Для каких чисел это верно?

Ответ. Не всегда. Верно только для $a \leq 0$.

229. Для какого числа выполняются оба условия: $|a| = a$ и $|a| = –a$?

Ответ. Только для $a = 0$.

2.3. Сравнение целых чисел

В данном пункте учебника вводится правило сравнения целых чисел с помощью ряда целых чисел. Из этого правила естественно вытекают правила сравнения целых чисел с нулём и правило сравнения отрицательных чисел.

РТ. Лучшему усвоению этой темы будет способствовать использование заданий **93–100**.

Решения и комментарии

244. Верно ли утверждение: если $a > b$, то $|a| > |b|$?

Решение. Это утверждение неверно для любых чисел a и b. Например, $+2 > –3$, но $|+2| < |–3|$.

245. Верно ли утверждение: если $a > b$, то $|a| < |b|$?

Решение. Это утверждение неверно для любых чисел a и b. Например, $+20 > –3$, но $|+20| > |–3|$.

246. Может ли быть так, чтобы $a \neq b$, но $|a| = |b|$? Приведите примеры. Как называют такие числа a и b?

Ответ. Может, $a \neq b$, но $|a| = |b|$ для любых противоположных чисел, отличных от нуля.

Промежуточный контроль. С–7, Т–9, Т–10, Т–11.

2.4. Сложение целых чисел

2.5. Законы сложения целых чисел

В пункте 2.4 учебника правила сложения целых чисел иллюстрируются с помощью ряда целых чисел. Перед рассмотрением этих правил полезно напомнить, как складываются выигрышные и проигрышные очки. Это даст опору для нового знания.

Ещё раз подчеркнём, что необходимо проверять усвоение учащимися правил действий с целыми числами. Это важно для развития речи. Для проверки знания правил можно использовать задания **249–251**, предназначенные для устной работы.

Обратим внимание на необходимость записи действий с отрицательными числами в строчку. Если вычисление с модулями выполняется в столбик, то, записав действие в столбик, ученик должен поставить знак суммы после знака «=» (эта привычка убережёт учащихся от многих ошибок), а затем вычислить её модуль (в столбик, если потребуется). Образец такой записи приведён перед заданием **259**.

В пункте 2.5 учебника формулируются переместительный и сочетательный законы сложения для целых чисел, показывается применение этих законов для вычисления суммы нескольких слагаемых.

Работа по использованию законов сложения приучает учащихся к преобразованию числовых выражений, что является эффективной пропедевтикой алгебры.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **101–108**. С помощью заданий **101–102** отрабатывается выбор знака суммы и выбор действия с модулями в соответствии с правилами сложения целых чисел. С помощью задания **105**

отрабатывается упрощение записи действий с целыми числами.

Решения и комментарии

Вычислите, применяя законы сложения **(274—275)**.

274. в) (–10) + (–9) + (–8) + (–7) + ... + 7 + 8 + 9 + 10;

г) (–100) + (–99) + (–98) + ... + 98 + 99 + 100.

Решение. в) (–10) + (–9) + (–8) + (–7) + ... + 7 + 8 + 9 + 10 = (–10 + 10) + + (–9 + 9) + … + (–1 + 1) + 0 = 0 (здесь имеется 10 пар противоположных чисел, дающих в сумме 0, и число 0);

г) (–100) + (–99) + (–98) + ... + 98 + 99 + 100 = (–100 + 100) + (–99 + 99) + + … + (–1 + 1) + 0 = 0 (здесь имеется 100 пар противоположных чисел, дающих в сумме 0, и число 0).

275. г) (–1) + 2 + (–3) + 4 + ... + (–99) + 100.

Решение. Разобьём все слагаемые на 50 пар, каждая из которых имеет сумму 1. Тогда (–1) + 2 + (–3) + 4 + ... + (–99) + 100 = (–1 + 2) + (–3 + 4) + ... + + (–99 + 100) = 50.

Задание **279** готовит учащихся к переходу от вычитания целых чисел к сложению. Задание **280** в ряде случаев требует вычитания, но учащиеся должны подбирать значение *x*, опираясь на понимание того, что –10 это сумма –8 и –2. Если это понимание выработано, то в дальнейшем учащиеся будут выполнять вычитание –10 – (–8) = –2 без перехода к сложению.

279. К числу *a* прибавьте число, противоположное *b*:

а) *a* = 12, *b* = –7; б) *a* = 13, *b* = 16.

Решение.

а) Если *a* = 12, *b* = –7, то *a* + (–*b*) = 12 + 7 = 19.

б) Если *a* = 13, *b* = 16, то *a* + (–*b*) = 13 + (–16) = –3.

280. Перепишите, заменив *x* числом так, чтобы получилось верное равенство:

а) (–6) + (–7) = *x*; б) –8 + *x* = –10; в) –8 + *x* = –3.

Решение.

а) (–6) + (–7) = –13; б) –8 + (–2) = –10; в) –8 + 5 = –3.

2.6. Разность целых чисел

В данном пункте учебника определена разность целых чисел, показано, что разность $a - b$ целых чисел a и b равна сумме $a + (-b)$ — числа a и числа, противоположного числу b.

Следует отметить, что после работы с заданиями **76–83 (РТ)** учащиеся обычно хорошо чувствуют «состав числа», например, понимают, что $-5 = -1 + (-4) = -2 + (-3)$. Поэтому при вычитании они не переходят к сложению, если модуль уменьшаемого больше модуля вычитаемого, например, они сразу пишут: $-5 - (-1) = -4$, $-5 - (-4) = -1$ и т. п.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **109–114**.

Решения и комментарии

Вычислите наиболее простым способом **(297—298).**

297. а) $-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1$;

б) $-8 - 7 - 5 - 3 - 1 + 0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9$.

Решение. а) Здесь у каждого положительного слагаемого имеется противоположное ему число. Сумма чисел в каждой такой паре равна 0, поэтому

$$-1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = -6 + 0 = -6.$$

б) Здесь у каждого отрицательного слагаемого имеется противоположное ему число. Сумма чисел в каждой такой паре равна 0, поэтому

$$-8 - 7 - 5 - 3 - 1 + 0 + 1 + 3 + 5 + 7 + 8 + 9 = 0 + 9 = 9.$$

298. г) $1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100$.

Решение. Так как

$$1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100 = (1 - 2) + (3 - 4) + ... + (99 - 100),$$

то имеется 50 пар чисел, сумма которых равна -1, поэтому

$$1 - 2 + 3 - 4 + ... + 99 - 100 = -50.$$

301. Найдите сумму нескольких одинаковых слагаемых:

а) $\underbrace{(-5)+(-5)+\ldots+(-5)}_{6}$;   б) $\underbrace{(-7)+(-7)+\ldots+(-7)}_{8}$.

Это задание готовит учащихся к изучению умножения целых чисел. Лучше всего, если они определят знак суммы, затем действие, с помощью которого будет найден модуль суммы (сложение одинаковых модулей). Вычислять этот модуль они будут, скорее всего, умножением положительных чисел.

Решение. а) $\underbrace{(-5)+(-5)+\ldots+(-5)}_{6} = -\underbrace{(5+5+\ldots+5)}_{6}$ = –(5 · 6) = –30;

б) $\underbrace{(-7)+(-7)+\ldots+(-7)}_{8} = -\underbrace{(7+7+\ldots+7)}_{8}$ = –(7 · 8) = –56.

Промежуточный контроль. С–8, Т–12, Т–13, Т–14.

2.7. Произведение целых чисел

В данном пункте учебника определены произведение целых чисел, степень целого числа с натуральным показателем, сформулированы переместительный и сочетательный законы умножения для целых чисел.

Обратим внимание на то, что правила умножения целых чисел (определения) не могут быть доказаны. Обоснованием именно таких правил служит практика.

В отличие от сложения целых чисел знак произведения не зависит от того, модуль какого множителя больше.

Запоминанию правила знаков может помочь такая задача-шутка. В записи

(+1) · (+1) = +1,

(+1) · (–1) = –1,

(–1) · (+1) = –1,

(–1) · (–1) = +1

первый множитель означает: +1 — мне нравится, –1 — мне не нравится; второй множитель означает: +1 — хороший поступок, –1 — плохой поступок; число, записанное в правой части, означает: +1 — это хорошо, −1 — это плохо.

Первое предложение можно прочитать так: «Мне нравится хороший поступок — это хорошо». Прочитайте остальные предложения.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **115–121**.

Решения и комментарии

317. Произведение трёх чисел положительно. Можно ли утверждать, что все три числа положительные? Приведите примеры.

Решение. Такие задания полезны для воспитания логического мышления учащихся. На них можно показать, что обратное утверждение не всегда верно. В самом деле:

1) Если три числа положительные, то их произведение положительно — это утверждение верно.

2) Если произведение трёх чисел положительно, то эти числа положительные — это утверждение неверно. Достаточно привести пример: –1, –2, 3.

318. Произведение двух чисел равно нулю. Докажите, что среди этих чисел есть хотя бы один нуль.

Решение. Здесь можно показать применение доказательства от противного, перебирая все возможные случаи и приходя в каждом из них к противоречию с условием.

Предположим, что среди двух чисел нет нуля.

Если оба числа положительные, то произведение положительно. А по условию задачи произведение равно нулю. Следовательно, такой случай невозможен.

Если среди них есть одно отрицательное число, а другое положительное, то произведение отрицательно. А по условию задачи произведение равно нулю. Следовательно, такой случай невозможен.

Наконец, если оба числа отрицательные, то произведение положительно. А по условию задачи произведение равно 0. Следовательно, такой случай невозможен.

Итак, предположение, что среди двух чисел нет нуля, неверно. Следовательно, среди них есть хотя бы один нуль.

Слова «хотя бы один нуль» учащиеся должны понимать так: имеется или один нуль, или два нуля.

Задания **329–330** готовят учащихся к изучению деления целых чисел.

329. а) Найдите число одинаковых слагаемых: (–2) + (–2) + ... + (–2) = –12.

Решение. Одинаковые слагаемые и их сумма отрицательные. Так как 12 = 2 · 6, то модуль 12 получен сложением шести двоек, следовательно, слагаемых 6.

330. а) Какие одинаковые слагаемые сложили:

(...) + (...) + (...) + (...) + + (...) = –25?

Решение. Сумма одинаковых слагаемых отрицательна, следовательно, сложили отрицательные числа. Так как 25 = 5 · 5, то модуль 25 получен сложением пяти пятёрок, следовательно, каждое слагаемое равно –5.

2.8. Частное целых чисел

В данном пункте учебника определено частное целых чисел a и b, таких, что $|a|$ делится на $|b|$ нацело. Теперь изучены все арифметические действия над целыми числами. Здесь можно напомнить принятый ранее порядок действий при вычислении значения числового выражения — для целых чисел он остаётся тем же.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **122–125**.

Решения и комментарии

343. а) Вычислите: 43 212 : 78 – 407 · 720 + 350 · 509.

Решение. Здесь три действия с положительными числами нужно выполнить в столбик, четвёртое и пятое записать в строчку (результаты этих действий отрицательные числа), а действия с модулями можно записать в столбик.

1) $\begin{array}{r|l} -43212 & 78 \\ \underline{390} & \overline{554} \\ -421 & \\ \underline{390} & \\ -312 & \\ \underline{312} & \\ 0 & \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} \times\ 407 \\ \underline{720} \\ +\ 814 \\ \underline{2849} \\ 293040 \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} \times\ 509 \\ \underline{350} \\ +\ 2545 \\ \underline{1527} \\ 178150 \end{array}$

4) $554 - 293040 = -292486$ $\begin{array}{r} -\ 293040 \\ \underline{554} \\ 292486 \end{array}$ 5) $-292486 + 178150 = -114336$ $\begin{array}{r} -\ 292486 \\ \underline{178150} \\ 114336 \end{array}$

Промежуточный контроль. С–9, С–10, Т–15, Т–16.

2.9. Распределительный закон

В данном пункте учебника сформулирован распределительный закон для целых чисел. Отмечено, что его доказательство сводится к распределительному закону для натуральных чисел, доказательство приведено для конкретных чисел.

Основное применение распределительного закона — раскрытие скобок и вынесение общего множителя за скобки. Применению распределительного закона для упрощения вычислений нужно уделить достаточно внимания, так как эта работа готовит учащихся к изучению алгебры.

Применение распределительного закона иногда существенно упрощает вычисления, примеры такого рода имеются в учебнике и в рабочей тетради, их надо использовать для укрепления мотивации к изучению математики.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **126–134**.

Решения и комментарии

Упростите числовое выражение **(353–355)**.

Упростить числовое выражение значит найти самую простую форму его записи — его числовое значение. Сделать это можно разными способами, но стремиться надо к выбору самого простого из них.

353. а) (–8) · (–7 + 5) – 5 · (–8);   б) 3 · (–98 + 2) + 3 · 98.

Решение. а) (–8) · (–7 + 5) – 5 · (–8) = (–8) · (–7 + 5 – 5) = (–8) · (–7) = 56;

б) $3 \cdot (-98 + 2) + 3 \cdot 98 = -3 \cdot 98 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 98 = 3 \cdot 2 = 6$.

354. а) $(12 - 27) \cdot (-1)$; б) $(-1) \cdot (35 - 88)$.

Решение. а) $(12 - 27) \cdot (-1) = 12 \cdot (-1) + (-27) \cdot (-1) = -12 + 27 = 15$;

б) $(-1) \cdot (35 - 88) = -35 + 88 = 53$.

355. а) $4 \cdot (-25 + 76 + 24)$; б) $(25 - 62 - 38) \cdot (-4)$.

Решение. а) $4 \cdot (-25 + 76 + 24) = 4 \cdot (-25 + 100) = 4 \cdot (-25) + 4 \cdot 100 = -100 + 400 = 300$;

б) $(25 - 62 - 38) \cdot (-4) = (25 - 100) \cdot (-4) = 25 \cdot (-4) + (-100) \cdot (-4) = -100 + 400 = 300$.

Замечание. В заданиях **354** и **355** ещё проще сначала найти разность в скобках, но здесь выбран приём решения, опирающийся на изучаемый распределительный закон.

357. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «+»:

б) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18$; в) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91$.

Решение. б) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18 = 16 \cdot (-17 - 18)$;

в) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91 = 19 \cdot (49 - 91)$.

358. Вынесите общий множитель за скобки со знаком «–»:

б) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18$; в) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91$.

Решение. б) $-16 \cdot 17 - 16 \cdot 18 = -16 \cdot (17 + 18)$;

в) $49 \cdot 19 - 19 \cdot 91 = -19 \cdot (-49 + 91)$.

360. а) Покажите, что $43 \cdot 15 - 55 \cdot 15 + 34 \cdot 15$ делится на 22.

Доказательство. $43 \cdot 15 - 55 \cdot 15 + 34 \cdot 15 = (43 - 55 + 34) \cdot 15 = 22 \cdot 15$ — делится на 22, что и требовалось доказать.

361. а) Вычислите: $42 \cdot 53 - 32 \cdot 53 - 42 \cdot 63 + 32 \cdot 63$.

Решение. $42 \cdot 53 - 32 \cdot 53 - 42 \cdot 63 + 32 \cdot 63 = (42 - 32) \cdot 53 - 63 \cdot (42 - 32) = 10 \cdot 53 - 63 \cdot 10 = (53 - 63) \cdot 10 = -10 \cdot 10 = -100$.

Промежуточный контроль. Т–17.

2.10. Раскрытие скобок и заключение в скобки

2.11. Действия с суммами нескольких слагаемых

В пункте 2.10 учебника вводится понятие суммы нескольких слагаемых для выражений вида –3 + 6 – 1, сформулированы правила раскрытия скобок, перед которыми стоит знак «+» или знак «–», правила заключения в скобки.

Обратим внимание на то, что в пункте 2.10 речь идёт о знаке «+» (или «–»), стоящем перед числом, а в пункте 2.11 показано, что если знак «+» (или «–») является знаком действия, то можно применять те же правила раскрытия скобок и заключения в скобки.

Работа с заданиями из учебника и рабочей тетради должна быть нацелена не только на отработку правил раскрытия скобок (и заключения в скобки). Надо постараться показать учащимся, что применение новых правил иногда позволяет обходиться без громоздких вычислений, а иногда и вовсе обходиться без вычислений, поэтому надо научиться их применять.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **135–143**.

Решения и комментарии

372. Вычислите: а) (456 – 75) – 25; б) –(728 – 49) + 51.

Решение.

а) (456 – 75) – 25 = 456 – 75 – 25 = 456 – (75 + 25) = 456 – 100 = 356;

б) –(728 – 49) + 51 = –728 + 49 + 51 = –728 + (49 + 51) = –728 + 100 = –628.

373. Вычислите: а) (7 · 95 – 900) – 7 · 95; б) –(795 – 9 · 99) – 99 · 9.

Решение. а) (7 · 95 – 900) – 7 · 95 = $\underline{7 \cdot 95}$ – 900 $\underline{– 7 \cdot 95}$ = – 900;

б) –(795 – 9 · 99) – 99 · 9 = –795 $\underline{+ 9 \cdot 99}$ – $\underline{99 \cdot 9}$ = –795.

В обоих случаях суммы содержат слагаемые, дающие в сумме нуль.

375. Заключите первые два слагаемых в скобки, перед скобками поставьте знак «+»: а) 79 – 48 + 15 – 8; б) – 56 + 38 – 12 + 100.

Решение. а) 79 – 48 + 15 – 8 = +(79 – 48) + 15 – 8;

б) – 56 + 38 – 12 + 100 = +(–56 + 38) – 12 + 100.

376. Заключите первые два слагаемых в скобки, перед скобками поставьте знак «–»: а) 79 – 48 + 15 – 8;   б) – 56 + 38 – 12 + 100.

Решение. а) 79 – 48 + 15 – 8 = –(–79 + 48) + 15 – 8;

б) –56 + 38 – 12 + 100 = –(56 – 38) – 12 + 100.

384. Вычислите, выбирая удобный способ:

а) 84 – (44 + 28);   б) 94 – (44 + 26).

Решение. а) 84 – (44 + 28) = 84 – 44 – 28 = 40 – 28 = 12;

б) 94 – (44 + 26) = 94 – 44 – 26 = 50 – 26 = 24.

385. Вычислите:

а) –(98 + 49) – (102 – 49);   б) (123 – 254) – (23 – 354).

Решение. а) –(98 + 49) – (102 – 49) = –98 $\underline{-\ 49}$ – 102 $\underline{+\ 49}$ = –200;

б) (123 – 254) – (23 – 354) = 123 – 254 – 23 + 354 = 123 – 23 + 354 – 254 = = 100 + 100 = 200.

Промежуточный контроль. Т–18, Т–19.

2.12. Представление целых чисел на координатной оси

В данном пункте развивается идея изображения чисел точками координатной оси: вводится понятие положительной (отрицательной) полуоси, определяется расстояние между точками с целыми координатами m и n для случая, когда известно, какое из чисел больше. Эту информацию можно обобщить, сообщив учащимся, что если не известно, какое из чисел m и n больше, то расстояние между точками m и n равно $|m - n|$.

В частности, если $m > n$, то $|m - n| = m - n$; если $m < n$, то $|m - n| = -(m - n) = n - m$; если $m = n$, то $|m - n| = |0| = 0$.

Изображение целых чисел имеет большое практическое и мировоззренческое значение, поэтому ему нужно уделить достаточно внимания.

Решения и комментарии

390. Дана координатная ось (рис. 8), некоторые её точки обозначены буквами A, B, C, D, E. Укажите координаты этих точек.

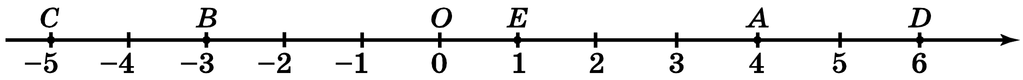

Рис. 8

Решение. Точки, изображённые на координатной оси, имеют координаты: C (–5); B (–3); O (0); E (1); A (4); D (6).

391. Вычислите длину отрезка (рис. 8): а) OA; б) OB; д) AC.

Решение. а) $OA = 4 - 0 = 4$; б) $OB = 0 - (-3) = 0 + 3 = 3$;

д) $AC = 4 - (-5) = 4 + 5 = 9$.

382. Определите расстояние между точками m и n координатной оси, если: а) $m = 7$, $n = -3$; б) $m = 3$, $n = -7$; в) $m = -8$, $n = 0$; г) $m = -8$, $n = 8$.

Решение. Расстояние между точками m и n координатной оси равно:

а) $m - n = 7 - (-3) = 7 + 3 = 10$; б) $m - n = 3 - (-7) = 3 + 7 = 10$;

в) $n - m = 0 - (-8) = 0 + 8 = 8$; г) $n - m = 8 - (-8) = 8 + 8 = 16$.

Промежуточный контроль. С–11, Т–20, К–3.

Дополнения к главе 2

1. Фигуры на плоскости, симметричные относительно точки

В данном пункте рассматриваются сначала точки, а потом фигуры на плоскости, симметричные относительно точки. При этом не рассматривается преобразование самой плоскости, а симметричность фигур устанавливается «физическим» действием — поворотом вокруг точки на 180°. Это этап опытного изучения геометрии, на котором многие факты устанавливаются «физически», с помощью наложения (воображаемого) фигур. Рассуждения и доказательства являются скорее правдоподобными рассуждениями, так как не опираются на аксиомы. Однако они уже содержат ссылки на ранее известные факты. Такой подход соответствует возрастным возможностям шестиклассников, а выполняемая работа даст им первоначальный геометрический опыт и подготовит к изучению систематического курса геометрии.

В задаче 3 из учебного текста показано, как идея симметричности фигур относительно точки помогает организовать упорядоченный перебор всех решений задачи на разрезание фигуры на две равные части.

Далее вводится понятие фигуры, симметричной относительно точки.

Решения и комментарии

393. Докажите, что любая прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника, делит его на две равные части.

Доказательство. Пусть прямая MN проходит через центр симметрии прямоугольника (рис. 9).

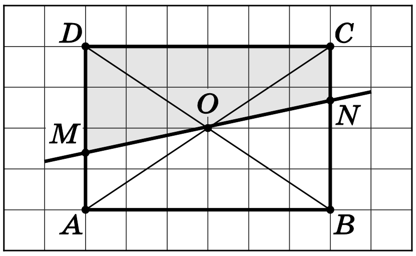

Рис. 9

Так как O — центр симметрии прямоугольника (точка пересечения его диагоналей), то точки D и B, C и A, M и N симметричны относительно точки O, поэтому при повороте на 180° вокруг точки O точка D перейдёт в точку B, точка C — в точку A, точка N — в точку M, точка M — в точку N. При этом закрашенный четырёхугольник $DCNM$ перейдёт в незакрашенный четырёхугольник $BAMN$, т. е. две части прямоугольника совпадают при наложении. Следовательно, прямая, проходящая через центр симметрии прямоугольника, делит его на две равные части, что и требовалось доказать.

412. Из прямоугольника вырезали квадрат (рис. 10, *а*). Постройте прямую, которая делит площадь закрашенной фигуры пополам.

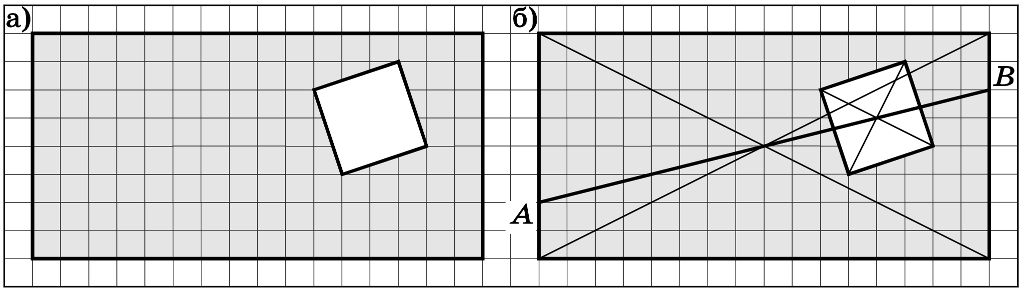

Рис. 10

Решение. Центр симметрии прямоугольника есть точка пересечения его диагоналей. Центр симметрии квадрата есть точка пересечения его диагоналей. Прямая AB, проходящая через эти центры симметрии, делит и прямоугольник, и квадрат на равные части (задача **405**). Следовательно, прямую надо провести через центры симметрии квадрата и прямоугольника (рис. 10, *б*).

413. Вороне как-то Бог послал кусочек сыра... Предположим, что, в отличие от героини известной басни, наша Ворона захотела разделить сыр поровну с Лисицей. Как она должна разрезать по прямой кусок сыра, если этот кусок имеет форму прямоугольника с круглой дыркой (рис. 11, *а*)? (Толщина куска сыра во всех местах одна и та же.)

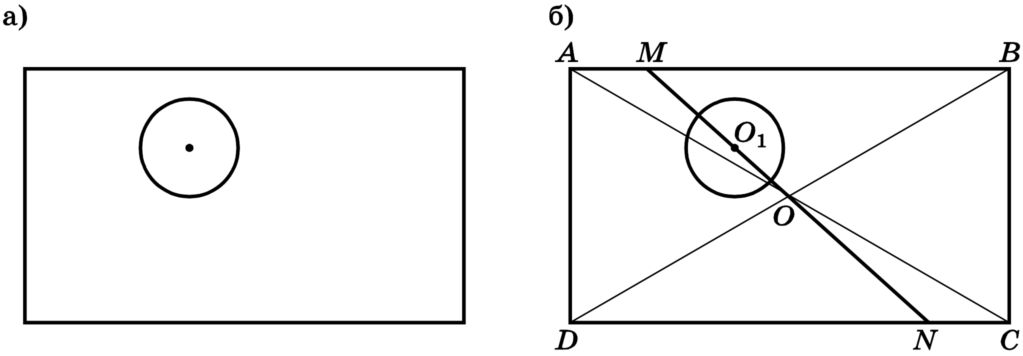

Рис. 11

Решение. Эта задача аналогична предыдущей задаче. Сыр имеет форму прямоугольника. Обозначим его $ABCD$, а точку пересечения его диагоналей O. Пусть O_1 — центр круга и прямая MN проходит через точки O и O_1. Тогда так как O — центр симметрии прямоугольника $ABCD$, то при повороте с центром O на 180° точка A переходит в точку C, точка B — в точку D, точка C — в точку A, точка D — в точку B (рис. 11, *б*). Отрезок AB переходит в отрезок CD, т. е. точка M отрезка AB переходит в точку N отрезка CD. При этом центр симметрии — точка O — является серединой отрезка MN. Следовательно, отрезок MN делит прямоугольник на две симметричные относительно точки O части, которые равны друг другу. Так как прямая MN делит на равные части и прямоугольник и круг, то она делит пополам прямоугольный кусок сыра с круглой дыркой.

Итак, чтобы разделить сыр поровну, надо провести прямую через центры симметрии прямоугольника и круга. Разумеется, надо считать, что центр круга известен, и не требовать от учащихся его построения.

2. Исторические сведения

В данном пункте приведены сведения из истории введения отрицательных чисел.

3. Занимательные задачи

В данном пункте помещены задачи, требующие доказательных рассуждений и связанные с отрицательными числами, а также логические задачи на доказательство и др.

Решения и комментарии

414. Запишите в строчку 5 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна.

Решение. Например, –5, 6, –5, 6, –5.

В следующей и во многих других задачах на вопрос: «Можно ли осуществить требуемое?» есть два ответа: «да» (учащиеся должны привести подтверждающий пример) и «нет» (учащиеся должны доказать, что такого примера привести нельзя).

415. Можно ли записать в строчку 6 таких чисел, чтобы сумма любых двух соседних чисел была положительна, а сумма всех чисел была отрицательна?

Решение. Нельзя, так как такие числа можно было бы разбить на 3 пары, сумма которых положительна:

$$\underbrace{\text{1-е, 2-е,}}_{+}\ \underbrace{\text{3-е, 4-е,}}_{+}\ \underbrace{\text{5-е, 6-е.}}_{+}$$

418. Можно ли расставить в клетках таблицы, состоящей из трёх строк и четырёх столбцов, целые числа так, чтобы сумма чисел:

а) в каждой строке была равна –20, а в каждом столбце –15;

б) в каждой строке была равна –20, а в каждом столбце –16.

Решение. а) Можно (см. таблицу).

–5	–5	–5	–5
–5	–5	–5	–5
–5	–5	–5	–5

б) Нельзя, так как в противном случае сумма всех чисел при подсчёте по строкам была бы равна –20 · 3 = –60, а по столбцам –16 · 4 = –64.

419. В строчку записаны несколько чисел так, что сумма любых трёх соседних чисел положительна. Можно ли утверждать, что сумма всех чисел положительна, если чисел: а) 18; б) 19; в) 20?

Решение. а) Можно, так как такие числа разбиваются на шесть троек, в каждой из которых сумма чисел положительна.

б) Нельзя, приведём пример: –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10.

Здесь сумма любых трёх соседних чисел положительна, сумма первых 18 чисел равна 6, а сумма всех чисел отрицательна.

в) Нельзя, приведём пример: –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10, 21, –10, –10.

Здесь сумма любых трёх соседних чисел положительна, сумма первых 18 чисел равна 6, а сумма всех чисел отрицательна.

420. В непрозрачном мешке лежат 10 белых и 5 чёрных шаров. Какое наименьшее число шаров нужно вынуть из мешка не глядя, чтобы среди них было 2 шара: а) белых; б) чёрных; в) разных цветов; г) одного цвета?

Решение. а) В худшем случае мы сначала вытащим 5 чёрных шаров и только потом 2 белых, т. е. нужно вынуть 7 шаров.

б) В худшем случае мы вытащим 10 белых шаров и только потом 2 чёрных, т. е. нужно вынуть 12 шаров.

в) В худшем случае мы вытащим 10 белых шаров и только потом 1 чёрный, т. е. нужно вынуть 11 шаров.

г) В худшем случае мы вытащим 1 чёрный шар и 1 белый. Следующий третий шар будет или белый, или чёрный. В любом случае получится пара шаров одного цвета, т. е. нужно вынуть 3 шара.

422. Имеется 3 комнаты с разными замками и 3 ключа от этих комнат. Какое наименьшее число проб нужно сделать, чтобы определить, какой ключ от какой комнаты?

Решение. В худшем случае у первой двери придётся сделать 2 пробы — если два ключа не подойдут, то третий не надо пробовать, он от этой двери. Аналогично у второй двери потребуется сделать одну пробу.

Ответ: 3 пробы.

424. Ведущий телевизионной игры спросил игрока:

— Верите ли Вы, что я не курю уже 20 дней?

— Верю,— ответил игрок.

— А вот и неверно, я не курю уже 24 дня!

Правильно ли ведущий оценил ответ игрока?

Решение. Случай, описанный в задаче, произошёл на телевизионной передаче «Блеф-клуб». Ведущий передачи неверно оценил ответ игрока, так как среди 24 дней без курения были 20 дней, в течение которых он не курил.

425. Встретились три подруги — Белова, Краснова и Чернова. На одной из них было чёрное платье, на другой — красное, на третьей — белое. Девочка в белом платье говорит Черновой: «Нам надо поменяться платьями, а то цвет наших платьев не соответствует фамилиям». Кто в каком платье был?

Решение. Из условия задачи следует, что на Беловой не белое платье, на Черновой не чёрное, девочка в белом платье не Чернова (поставим минусы в соответствующие клетки таблицы). Теперь очевидно, что белое платье может быть только на Красновой, а Чернова может быть только в красном платье (ставим «+» в соответствующие клетки таблицы). Тогда получим, что Белова в чёрном платье.

Платье Фамилия	белое	чёрное	красное
Белова	–	+	–
Чернова	–	–	+
Краснова	+	–	–

426. Коля, Боря, Вова и Юра заняли первые четыре места в соревновании. На вопрос, какие места они заняли, трое из них ответили:

1) Коля ни первое, ни четвёртое;

2) Боря — второе;

3) Вова не был последним.

Какое место занял каждый мальчик?

Решение. Отразим все ответы в таблице:

	К	Б	В	Ю
I	–			
II		+		
III				
IV	–		–	

В строке или столбце с плюсом могут стоять только минусы:

	К	Б	В	Ю
I	–	–		
II	–	+	–	–
III		–		
IV	–	–	–	

Следовательно, Коля занял третье место:

	К	Б	В	Ю
I	−	−		
II	−	+	−	−
III	+	−	−	−
IV	−	−	−	

Тогда получим, что Вова занял первое место, а Юра — четвёртое.

427. Имеется три мешка с монетами. В двух из них настоящие монеты, массой 10 г каждая, а в одном фальшивые монеты массой 9 г каждая. Есть весы, показывающие общую массу положенных на них монет. Как с помощью одного взвешивания определить, в каком мешке фальшивые монеты, если из мешков можно брать любое число монет?

Решение. Здесь предполагается, что в мешках может быть неодинаковое число монет и что из мешков можно брать любое (разумное) количество монет. Пронумеруем мешки и из первого возьмём 1 монету, из второго — 2, из третьего — 3. Если бы все монеты были настоящие, то масса взятых монет была бы равна $(1 + 2 + 3) \cdot 10 = 60$ (г). Если масса взятых монет окажется равной 59 г, то среди них $60 - 59 = 1$ монета фальшивая (она из первого мешка). Если масса взятых монет окажется равной 58 г, то среди них $60 - 58 = 2$ монеты фальшивые (они из второго мешка). Если масса взятых монет окажется равной 57 г, то среди них $60 - 57 = 3$ монеты фальшивые (они из третьего мешка).

429. В коробке лежат три пилотки — одна синяя и две красные. Учитель вызывает к доске двух учеников, которые становятся лицом к классу и закрывают глаза. Учитель надевает каждому из них на голову пилотку, а оставшуюся прячет в коробку. Ученики открывают глаза, и каждый видит пилотку своего товарища, но не видит своей. Может ли кто-нибудь из них определить цвет своей пилотки? Рассмотрите два случая: а) надеты одна синяя и одна красная пилотка; б) надеты две красные пилотки.

Решение. Эту задачу полезно разыграть, заготовив заранее необходимое число пилоток (колпаков).

а) Ученик в красной пилотке видит единственную синюю пилотку и определяет цвет своей пилотки: она красная.

б) Один из двух учеников мог рассуждать так: «Если бы на мне была синяя пилотка, то ученик в красной пилотке быстро определил бы цвет своей пилотки (задача **429 а**), но он молчит, значит, он не видит на мне синюю пилотку. На мне красная пилотка».

431. Приехав в город, Ходжа Насреддин постучал в ворота первого дома и попросил хозяина пустить его переночевать. Денег у Насреддина не было, но была золотая цепочка из семи звеньев. Хозяин согласился приютить путника на семь дней с такими условиями:

1) за один день Насреддин платит одним звеном цепочки;

2) расплачиваться он должен ежедневно;

3) хозяин соглашался принять не более одного распиленного звена.

Смог ли Ходжа Насреддин расплатиться с хозяином?

Решение. Смог. Для этого нужно распилить третье звено в цепочке и заплатить им за первый день. За второй день заплатить двумя звеньями, забрав одно звено обратно. За третий день заплатить одним звеном, за четвёртый день заплатить четырьмя звеньями, забрав одно и два звена обратно. За пятый день заплатить одним звеном, за шестой день заплатить двумя звеньями, забрав одно звено обратно. Наконец, за седьмой день заплатить одним звеном.

432. В одной коробке лежат два белых шара, в другой — два чёрных, в третьей — один белый и один чёрный. На каждой коробке имеется табличка, но она неправильно указывает содержимое коробки (рис. 12). Из какой коробки не глядя надо вынуть шар, чтобы можно было определить содержимое каждой коробки?

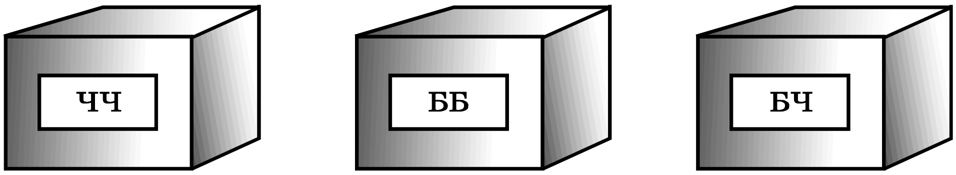

Рис. 12

Решение. Надо вынуть шар из коробки с надписью БЧ (там либо 2 чёрных, либо 2 белых).

Если вынули белый шар, то в этой коробке 2 белых шара, 2 чёрных шара не могут лежать в коробке с надписью ЧЧ, следовательно, они в коробке с надписью ББ, а разноцветные шары лежат в коробке с надписью ЧЧ.

Если вынули чёрный шар, то в этой коробке 2 чёрных шара, 2 белых шара не могут лежать в коробке с надписью ББ, следовательно, они в коробке с надписью ЧЧ, а разноцветные шары лежат в коробке с надписью ББ.

Итак, в любом из двух возможных случаев можно определить, какие шары лежат в какой коробке.

433. Три друга Коля, Олег и Петя играли во дворе, и один из них случайно разбил мячом оконное стекло. Коля сказал: «Это не я разбил стекло». Олег сказал: «Это Петя разбил стекло». Позднее выяснилось, что одно из этих утверждений верное, а другое нет. Кто из мальчиков разбил стекло?

Решение. Предположим, что Коля сказал неправду, тогда Олег тоже сказал неправду, что невозможно по условию задачи. Значит, Коля сказал правду, тогда Олег сказал неправду, т.е. стекло разбил Олег.

434. *Задачи С. А. Рачинского.* а) В будущем (1892) году думаю провести в Петербурге столько минут, сколько часов проведу в деревне. Сколько времени я проведу в Петербурге? (Время на переезды не учитывается.)

Решение. В високосном 1892 году было 366 дней. Так как час в 60 раз больше минуты, то он планировал в деревне провести в 60 раз больше времени, чем в Петербурге.

1) 60 + 1 = 61 (часть) — приходится на весь 1892 год;

2) 366 : 61 = 6 (дней) — он пробудет в Петербурге.

Ответ. 6 дней.

Глава 3. Рациональные числа

В этой главе происходит следующий этап расширения множества чисел до множества всех рациональных чисел. Вводятся рациональные числа, их сравнение, изучаются арифметические действия с ними, законы сложения и умножения, смешанные дроби произвольного знака, изображение рациональных чисел на координатной оси.

Основное внимание при изучении данной темы уделяется действиям с рациональными числами. На втором этапе изучения отрицательных чисел соединяются сформированные ранее умения: определять знак результата и действовать с дробями. В то же время, учащиеся должны понимать, что любое действие с рациональными числами можно свести к нескольким действиям с целыми числами. Доказательство законов сложения и умножения для рациональных чисел можно провести на характерных числовых примерах с опорой на соответствующие законы для целых чисел. В учебнике приведено доказательство распределительного закона для рациональных чисел в общем виде. Это доказательство выделено как необязательное для всех учащихся.

Отметим, что в конце главы рассматриваются уравнения и решение задач с помощью уравнений.

При наличии учебных часов рассматриваются темы «Буквенные выражения» и «Фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой». Изучение второй темы будет способствовать развитию геометрического воображения школьников.

Цель изучения главы: добиться осознанного владения арифметическими действиями над рациональными числами.

3.1. Отрицательные дроби

В данном пункте учебника вводятся отрицательные дроби. Знакомые по целым числам понятия противоположных чисел и модуля числа переносятся на новое множество чисел.

Здесь же отмечается, что знак «–», стоящий перед дробью, можно записать в числителе или знаменателе.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **144–151**.

Решения и комментарии

447. Запишите дроби $\frac{-2}{7}$, $\frac{-6}{11}$, $\frac{-2}{13}$, $\frac{5}{-7}$, $\frac{4}{-9}$, $\frac{12}{-7}$ так, чтобы знак «–» стоял перед чертой дроби.

Решение. При выполнении вычислений с дробями произвольных знаков может получиться отрицательный числитель или (и) знаменатель, поэтому важно научить учащихся не только записывать знак «–», стоящий перед дробью, в её числитель или знаменатель (задания **445–446**), но и выполнять обратную операцию:

$$\frac{-2}{7}=-\frac{2}{7},\ \frac{-6}{11}=-\frac{6}{11},\ \frac{-2}{13}=-\frac{2}{13},\ \frac{5}{-7}=-\frac{5}{7},\ \frac{4}{-9}=-\frac{4}{9},\ \frac{12}{-7}=-\frac{12}{7}.$$

448. Равны ли дроби: а) $-\frac{2}{3}$ и $\frac{-2}{3}$; в) $\frac{4}{9}$ и $\frac{-4}{9}$?

Решение. а) $-\frac{2}{3}=\frac{-2}{3}$; в) $\frac{4}{9}\neq\frac{-4}{9}$, так как $\frac{-4}{9}=-\frac{4}{9}\neq\frac{4}{9}$.

Обратим внимание, что правил сравнения рациональных чисел ещё нет, поэтому сравнение дробей сводится к выяснению вопроса, можно ли обе дроби записать одинаково, т. е. являются ли они записями одного и того же числа.

449. Найдите модуль числа: а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{-2}{3}$; в) $\frac{3}{4}$.

Решение. а) $\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$; б) $\left|\frac{-2}{3}\right|=\frac{2}{3}$; в) $\left|\frac{3}{4}\right|=\frac{3}{4}$.

450. Вычислите:

а) $\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|$; г) $\left|-3\frac{2}{3}\right|-\left|-2\frac{2}{3}\right|$; д) $\left|-3\frac{1}{3}\right|\cdot\left|-2\frac{2}{5}\right|$; е) $\left|2\frac{3}{5}\right|:\left|-5\frac{1}{5}\right|$.

Решение. а) $\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1$;

г) $\left|-3\frac{2}{3}\right|-\left|-2\frac{2}{3}\right| = 3\frac{2}{3}-2\frac{2}{3} = 1;$

д) $\left|-3\frac{1}{3}\right|\cdot\left|-2\frac{2}{5}\right| = 3\frac{1}{3}\cdot 2\frac{2}{5} = \frac{10}{3}\cdot\frac{12}{5} = 8;$

е) $\left|2\frac{3}{5}\right|:\left|-5\frac{1}{5}\right| = 2\frac{3}{5}:5\frac{1}{5} = \frac{13}{5}:\frac{26}{5} = \frac{13\cdot 5}{5\cdot 26} = \frac{1}{2}.$

3.2. Рациональные числа

В данном пункте учебника вводится понятие рационального числа, рассматривается основное свойство дроби. При этом уточняется, что любое натуральное число является рациональным, а любое рациональное число можно записать в виде дроби, числитель которой целое, а знаменатель — натуральное число.

Особое внимание надо обратить на различные записи одного и того же числа и упрощение записи рационального числа (задание **464**). Такие задания включены в самостоятельную работу С–12.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **152–158**.

Решения и комментарии

461. Приведите дробь к положительному знаменателю: а) $\frac{1}{-2}$; в) $\frac{-2}{-3}$.

Решение. а) $\frac{1}{-2}=\frac{1\cdot(-1)}{-2\cdot(-1)} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$; в) $\frac{-2}{-3}=\frac{-2\cdot(-1)}{-3\cdot(-1)}=\frac{2}{3}$.

463. Приведите к знаменателю 60 дробь: а) $-\frac{1}{2}$; д) $\frac{13}{-15}$.

Решение. а) $-\frac{1}{2} = -\frac{{}^{30/}1}{2} = -\frac{30\cdot 1}{30\cdot 2}=-\frac{30}{60}$;

д) $\frac{13}{-15}=\frac{{}^{-4/}13}{-15}=\frac{-4\cdot 13}{-4\cdot(-15)}=\frac{-52}{60}=-\frac{52}{60}$.

464. Упростите запись рационального числа: а) $\frac{-1}{-2}$; д) $-\frac{81}{-72}$.

Решение. а) $\frac{-1}{-2} = \frac{-1\cdot(-1)}{-2\cdot(-1)}=\frac{1}{2}$;

д) $-\dfrac{81}{-72} = \dfrac{-81}{-72} = \dfrac{-81\cdot(-1)}{-72\cdot(-1)} = \dfrac{81}{72} = \dfrac{9\cdot 9}{9\cdot 8} = \dfrac{9}{8}$.

Промежуточный контроль. С–12, Т–21, Т–22.

3.3. Сравнение рациональных чисел

Данный пункт учебника посвящён сравнению рациональных чисел. Правила сравнения формулируются для дробей с общим положительным знаменателем. В предыдущем пункте установлено, что любое рациональное число можно записать в виде дроби, числитель которой целое, а знаменатель — натуральное число. Такая запись помогает при сравнении рациональных чисел с общим положительным знаменателем: сравнение сводится к сравнению целых чисел — числителей дробей.

Перед изложением нового материала полезно повторить правила сравнения положительных дробей и правила сравнения целых чисел.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **159–166**.

Решения и комментарии

492. Существуют ли дроби $\dfrac{p}{q}$, для которых верно неравенство

$-\dfrac{2}{5} < \dfrac{p}{q} < -\dfrac{1}{5}$? Если существуют, то найдите три такие дроби.

Решение. а) Приведём данные дроби к знаменателю 20:

$-\dfrac{2}{5} = \dfrac{-2}{5} = \dfrac{-2\cdot 4}{5\cdot 4} = \dfrac{-8}{20}$; $-\dfrac{1}{5} = \dfrac{-1}{5} = \dfrac{-1\cdot 4}{5\cdot 4} = \dfrac{-4}{20}$. Между дробями $\dfrac{-8}{20}$ и $\dfrac{-4}{20}$ можно взять дроби $\dfrac{-7}{20}$, $\dfrac{-6}{20}$ и $\dfrac{-5}{20}$. Каждая из них больше $-\dfrac{2}{5}$, но меньше $-\dfrac{1}{5}$.

493. Можно ли назвать 10 дробей, бóльших одной из данных дробей, но меньших другой: б) $-\dfrac{3}{4}$ и $-\dfrac{1}{4}$?

Можно ли назвать 100, 1000, 10 000 таких дробей?

Решение. Приведём данные дроби к знаменателю 100:

$-\dfrac{3}{4} = \dfrac{-3}{4} = \dfrac{-3\cdot 25}{4\cdot 25} = \dfrac{-75}{100}$; $-\dfrac{1}{4} = \dfrac{-1}{4} = \dfrac{-1\cdot 25}{4\cdot 25} = \dfrac{-25}{100}$. Между дробями $\dfrac{-75}{100}$ и

$\frac{-25}{100}$ можно взять 10 дробей, каждая из которых больше $-\frac{3}{4}$, но меньше $-\frac{1}{4}$. На самом деле можно взять 49 дробей: $\frac{-74}{100}$, $\frac{-73}{100}$, …, $\frac{-26}{100}$.

Если привести данные дроби к большему знаменателю, то можно назвать и 100, и 1000 и 10 000 дробей, каждая из которых больше $-\frac{3}{4}$, но меньше $-\frac{1}{4}$.

Промежуточный контроль. С–13, Т–23.

3.4. Сложение и вычитание рациональных чисел

В данном пункте учебника вводятся операции сложения и вычитания дробей любого знака. Важно подчеркнуть, что эти действия производятся по тем же правилам, как для обыкновенных дробей. Обратим внимание на то, что сложение и вычитание дробей с общим знаменателем сводится к сложению и вычитанию целых чисел (в числителе).

Сначала надо научиться складывать и вычитать дроби с общим знаменателем, потом дроби, у которых один знаменатель делится на другой, потом дроби с взаимно простыми знаменателями и, наконец, дроби, знаменатели которых имеют общий делитель, отличный от 1. В последнем случае учащиеся могут приводить дроби не к наименьшему знаменателю, а пользоваться правилами

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd} \text{ и } \frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}.$$

После того как учащиеся освоят правила сложения дробей произвольных знаков, следует обратить их внимание на то, что складывать рациональные числа можно так: сначала определять знак суммы, потом вычислять её модуль.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **167–177**.

Решения и комментарии

504. Вычислите: а) $\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}$; б) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{5}+\frac{-3}{5}$.

Решение. а) $\frac{-1}{3}+\frac{2}{3}=\frac{-1+2}{3}=\frac{1}{3}$;

б) $-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{-1}{4}+\frac{3}{4}=\frac{-1+3}{4}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$;

в) $\frac{1}{5}+\frac{-3}{5}=\frac{1+(-3)}{5}=\frac{-2}{5}=-\frac{2}{5}$.

507. Вычислите: а) $\frac{-2}{7}-\frac{-5}{7}$; г) $-\frac{12}{19}-\frac{7}{19}$.

Решение. а) $\frac{-2}{7}-\frac{-5}{7}=\frac{-2-(-5)}{7}=\frac{-2+5}{7}=\frac{3}{7}$;

г) $-\frac{12}{19}-\frac{7}{19}=\frac{-12}{19}-\frac{7}{19}=\frac{-12-7}{19}=\frac{-19}{19}=-1$.

512. Вычислите: а) $-\frac{9}{180}-\frac{7}{120}$; б) $-\frac{4}{210}+\frac{5}{140}$.

Решение.

а) $-\frac{9}{180}-\frac{7}{120}=-\frac{1}{20}-\frac{7}{120}=-\frac{6}{120}-\frac{7}{120}=\frac{-6}{120}-\frac{7}{120}=\frac{-6-7}{120}=\frac{-13}{120}=-\frac{13}{120}$;

б) $-\frac{4}{210}+\frac{5}{140}=-\frac{4\cdot 2}{210\cdot 2}+\frac{5\cdot 3}{140\cdot 3}=\frac{-8}{420}+\frac{15}{420}=\frac{-8+15}{420}=\frac{7}{420}=\frac{1}{60}$.

513. а) Вычислите: $-\frac{7}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}$.

Решение. $-\frac{7}{15}+\frac{2}{15}-\frac{1}{5}=\frac{-7+2}{15}-\frac{3}{15}=\frac{-5-3}{15}=\frac{-8}{15}=-\frac{8}{15}$.

Промежуточный контроль. С–14, С–15, Т–24.

3.5. Умножение и деление рациональных чисел

В данном пункте учебника вводятся операции умножения и деления дробей любого знака. Важно подчеркнуть, что эти действия выполняются по тем же правилам, что и для обыкновенных дробей. Обратим внимание на то, что умножение и деление дробей сводится к умножению целых чисел (в числителе и знаменателе).

В учебнике в общем виде доказано равенство $\frac{p}{q} = p : q$. С этого момента появляется основание считать, что дробь $\frac{p}{q}$ можно рассматривать как частное от деления её числителя p на знаменатель q. Далее в общем виде обосновываются правила умножения и деления дроби на натуральное число, вводится понятие взаимно обратных чисел и их свойство, объясняется, как возводить дробь в натуральную степень.

Обучение умножению и делению дробей надо начинать с сокращения дробей, чтобы предупредить громоздкие вычисления в числителе и знаменателе сократимой дроби. Например, учащиеся часто вычисляют так:

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{14\cdot 20}{15\cdot 21}=\frac{280}{315}=\frac{56}{63}=\frac{8}{9}$$

вместо

$$\frac{14}{15}\cdot\frac{20}{21}=\frac{14\cdot 20}{15\cdot 21}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 3}=\frac{8}{9}.$$

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **178–190**.

Решения и комментарии

526. Сократите дробь: а) $\frac{36\cdot(-112)}{126\cdot(-63)}$; г) $\frac{(-105)\cdot 84}{196\cdot 125}$.

Решение. Здесь полезно сначала определить знак дроби, а потом выполнять сокращение.

а) $\frac{36\cdot(-112)}{126\cdot(-63)} = +\frac{36\cdot 112}{126\cdot 63} = \frac{9\cdot 4\cdot 2\cdot 56}{2\cdot 63\cdot 7\cdot 9} = \frac{4\cdot 7\cdot 8}{63\cdot 7} = \frac{4\cdot 8}{63} = \frac{32}{63}$;

г) $\frac{(-105)\cdot 84}{196\cdot 125} = -\frac{105\cdot 84}{196\cdot 125} = -\frac{5\cdot 21\cdot 4\cdot 21}{4\cdot 49\cdot 5\cdot 25} = -\frac{21\cdot 21}{49\cdot 25} = -\frac{7\cdot 3\cdot 7\cdot 3}{7\cdot 7\cdot 25} = -\frac{9}{25}$.

530. в) Вычислите: $-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right)$.

Решение. Сначала надо вычислять по правилу умножения дробей:

$$-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right) = \frac{-4}{5}\cdot\frac{-10}{3} = \frac{(-4)\cdot(-10)}{5\cdot 3} = \frac{4\cdot 10}{5\cdot 3} = \frac{4\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 3} = \frac{8}{3}.$$

Затем, когда будет достигнуто понимание умножения дробей строго по правилу, можно сначала определять знак произведения, а потом находить его модуль, действуя с положительными дробями:

$$-\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{10}{3}\right) = +\frac{4}{5}\cdot\frac{10}{3} = \frac{4\cdot 10}{5\cdot 3} = \frac{4\cdot 2\cdot 5}{5\cdot 3} = \frac{8}{3}.$$

536. б) Вычислите: $\frac{16}{-25}:\left(-\frac{8}{15}\right)$.

Решение. Сначала надо вычислять по правилу деления дробей:

$$\frac{16}{-25}:\left(-\frac{8}{15}\right) = \frac{16}{-25}:\frac{-8}{15} = \frac{16\cdot 15}{-25\cdot(-8)} = \frac{16\cdot 15}{25\cdot 8} = \frac{8\cdot 2\cdot 5\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 8} = \frac{6}{5}.$$

Затем, когда будет достигнуто понимание умножения дробей строго по правилу, можно сначала определять знак частного, а потом находить его модуль, действуя с положительными дробями:

$$\frac{16}{-25}:\left(-\frac{8}{15}\right) = +\frac{16}{25}:\frac{8}{15} = \frac{16\cdot 15}{25\cdot 8} = \frac{8\cdot 2\cdot 5\cdot 3}{5\cdot 5\cdot 8} = \frac{6}{5}.$$

3.6. Законы сложения и умножения

В данном пункте учебника рассмотрены пять законов сложения и умножения. Здесь подчёркнуто, что доказательство любого из этих законов можно провести, опираясь на соответствующие законы для целых чисел. В качестве примера приведено доказательство в общем виде распределительного закона. Это доказательство выделено в учебнике как не обязательное для всех учащихся. В слабом классе это доказательство можно провести на конкретном примере — такого рода доказательства часто использовались, начиная с 5 класса.

Следует обратить внимание на работу с формулировками законов, что, кроме запоминания важных фактов, способствует развитию речи.

Начать работу с применением законов для вычислений лучше с заданий из рабочей тетради. Здесь подобраны такие задания, при выполнении которых применение законов сложения и умножения упрощает вычисления. Задания из учебника надо использовать для тренировки вычислений, применяя там, где это окажется полезным.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **191–194**.

Решения и комментарии

Нужно обратить внимание учащихся на то, что иногда сочетательный и переместительный законы умножения позволяют упростить вычисления.

548. а) Вычислите, применяя законы сложения и умножения: $\frac{4}{15}+\frac{5}{36}+\frac{11}{15}+\frac{31}{36}$.

Решение. $\frac{4}{15}+\frac{5}{36}+\frac{11}{15}+\frac{31}{36} = \left(\frac{4}{15}+\frac{11}{15}\right)+\left(\frac{5}{36}+\frac{31}{36}\right) = \frac{15}{15}+\frac{36}{36} = 1 + 1 = 2.$

554. а) Вычислите: $\frac{3}{8}-\frac{2}{7}+\frac{5}{8}-\frac{5}{7}$.

Решение. $\frac{3}{8}-\frac{2}{7}+\frac{5}{8}-\frac{5}{7} = \frac{3}{8} + \frac{5}{8} + \frac{-2}{7}+\frac{-5}{7} = \frac{8}{8} + \frac{-7}{7} = 1 + (-1) = 0.$

562. а) Вычислите: $\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{24}-\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{24}$.

Решение. $\frac{8}{9}\cdot\frac{7}{24}-\frac{8}{9}\cdot\frac{5}{24} = \frac{8}{9}\cdot\left(\frac{7}{24}-\frac{5}{24}\right) = \frac{8}{9}\cdot\frac{2}{24} = \frac{8\cdot 2}{9\cdot 24} = \frac{8\cdot 2}{9\cdot 8\cdot 3} = \frac{2}{27}$.

193 (РТ). и) Вычислите, применяя распределительный закон:

$$\frac{11}{13}\cdot\left(\frac{13}{22}-\frac{3}{7}\right)+\frac{3}{13}\cdot\left(-\frac{13}{3}+\frac{11}{7}\right).$$

Решение.

$$\frac{11}{13}\cdot\left(\frac{13}{22}-\frac{3}{7}\right)+\frac{3}{13}\cdot\left(-\frac{13}{3}+\frac{11}{7}\right) = \frac{11}{13}\cdot\frac{13}{22}-\frac{11}{13}\cdot\frac{3}{7}+\frac{3}{13}\cdot\left(-\frac{13}{3}\right)+\frac{3}{13}\cdot\frac{11}{7} =$$

$$= \frac{11\cdot 13}{13\cdot 22}-\frac{11\cdot 3}{13\cdot 7}-1+\frac{3\cdot 11}{13\cdot 7} = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2}.$$

Промежуточный контроль. С–16, С–17, Т–25, Т–26, К–4.

3.7. Смешанные дроби произвольного знака

В данном пункте учебника вводятся смешанные дроби произвольного знака. Это другая форма записи рациональных чисел, использование которой упрощает сложение и вычитание (но не умножение и деление) дробей.

Учащиеся должны понимать, что действия со смешанными дробями произвольного знака сводятся к определению знака результата и к выполнению действий с положительными смешанными дробями — их модулями.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **195–202**.

Решения и комментарии

578. а) Вычислите, предварительно указав порядок действий:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right).$$

Решение. Сначала выполним умножение в скобках, затем умножим $-\frac{2}{5}$ на $2\frac{1}{2}$, затем перемножим результаты двух первых действий.

1) $-1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = -\frac{4\cdot 1}{3\cdot 2} = -\frac{2}{3}$;

2) $\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{2} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2} = -1$; 3) $-\frac{2}{3}\cdot(-1) = \frac{2}{3}$.

Тот же результат можно получить, применяя законы умножения:

$$\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot 2\frac{1}{2}\cdot\left(-1\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\right) = +\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{2\cdot 5\cdot 4\cdot 1}{5\cdot 2\cdot 3\cdot 2} = \frac{2}{3}.$$

587. а) Вычислите: $7\frac{2}{9}\cdot 8\frac{2}{3}-7\frac{2}{9}\cdot 6\frac{2}{3}$.

Решение. $7\frac{2}{9}\cdot 8\frac{2}{3}-7\frac{2}{9}\cdot 6\frac{2}{3} = 7\frac{2}{9}\cdot\left(8\frac{2}{3}-6\frac{2}{3}\right) = 7\frac{2}{9}\cdot 2 = 14\frac{4}{9}$.

588. а) Вычислите: $7\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)-17\frac{29}{30}$.

Решение. $7\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5}\right)+\left(-1\frac{2}{3}\right)\cdot\left(-\frac{9}{10}\right)-17\frac{29}{30} = -\frac{15}{2}\cdot\frac{1}{5}+\frac{5}{3}\cdot\frac{9}{10}-17\frac{29}{30} =$

$= -\frac{15\cdot 1}{2\cdot 5}+\frac{5\cdot 9}{3\cdot 10}-17\frac{29}{30} = -\frac{3}{2}+\frac{3}{2}-17\frac{29}{30} = -17\frac{29}{30}$.

Промежуточный контроль. С–18, С–19, Т–27.

3.8. Изображение рациональных чисел на координатной оси

В данном пункте изучается важный материал — изображение рациональных чисел на координатной оси. Здесь определяется расстояние между точками a и b (точками с координатами a и b), а также вычисляется координата середины отрезка по координатам его концов; вводится понятие среднего арифметического нескольких чисел.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **203–207**.

Решения и комментарии

600. Даны точки $A(2)$ и $B(2\frac{1}{2})$. Найдите координату точки C — середины отрезка AB, координату точки D — середины отрезка CB, координату точки E — середины отрезка CD. Изобразите эти точки на координатной оси.

Решение. Координата точки C равна $\dfrac{2+2\frac{1}{2}}{2} = 2\frac{1}{4}$. Координата точки D равна $\dfrac{2\frac{1}{2}+2\frac{1}{4}}{2} = 2\frac{3}{8}$. Координата точки E равна $\dfrac{2\frac{1}{4}+2\frac{3}{8}}{2} = 2\frac{5}{16}$ (рис. 13).

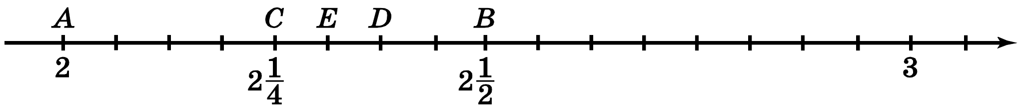

Рис. 13

601. а) Найдите координату точки B по координатам точки A и точки C — середины отрезка AB, если A (2), C (5).

Решение. Так как $AC = BC = 5 - 2 = 3$, то точка B имеет координату $5 + 3 = 8$. Проверкой убеждаемся, что $\dfrac{2+8}{2} = 5$ (рис. 14).

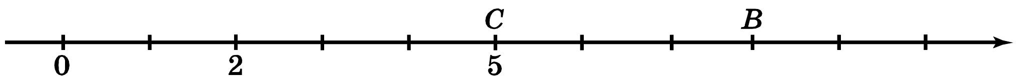

Рис. 14

602. а) Найдите координаты точек, делящих отрезок AB на три равные части, если A (5), B $(9\frac{1}{2})$.

Решение. Так как $AB = 9\frac{1}{2} - 5 = 4\frac{1}{2}$, то отрезок AB делится на три равные части длиной $4\frac{1}{2} : 3 = \frac{9}{2} : 3 = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$. Поэтому координаты точек деления равны $5 + 1\frac{1}{2} = 6\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2} + 1\frac{1}{2} = 8$.

617. Отрезок, соединяющий точки 0 и 1 на координатной оси, разделили пополам — получили два отрезка. Правый отрезок разделили пополам — получили ещё два отрезка. Правый из них разделили пополам и т. д. Запишите координаты пяти первых полученных таким образом точек деления. Определите без вычислений координаты следующих пяти таких точек.

Решение. Координата первых пяти точек деления: $\frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{3}{4}$, $\frac{\frac{3}{4}+1}{2} = \frac{7}{8}$, $\frac{\frac{7}{8}+1}{2} = \frac{15}{16}$, $\frac{\frac{15}{16}+1}{2} = \frac{31}{32}$. Нетрудно найти координаты следующих пяти точек деления: $\frac{63}{64}$, $\frac{127}{128}$, $\frac{255}{256}$, $\frac{511}{512}$, $\frac{1023}{1024}$ — знаменатель каждой следующей дроби в 2 раза больше знаменателя предыдущей, а числитель каждой дроби на единицу меньше знаменателя.

Промежуточный контроль. С–20,Т–28.

3.9. Уравнения

В данном пункте вводятся понятия уравнения, корня уравнения, на конкретном примере объясняется правило переноса члена уравнения в другую часть с противоположным знаком. Столь позднее изучение уравнений объясняется тем, что после изучения действий с рациональными числами стали выполнимы любые действия с ними (кроме деления на нуль), и теперь можно говорить о том, что учащиеся умеют решить любое уравнение, которое после преобразований приводится к виду $ax = b$. Этого нельзя было сказать до изучения рациональных чисел, так как учащиеся не могли решить уравнения $3x = –2$, $x – 4x = 5$ и т. п.

Заметим, что при решении уравнений понятие «подобные члены уравнения» не используется. Этот вопрос будет изучаться в курсе алгебры 7 класса. Вместо этого предполагается применять законы умножения для раскрытия скобок и вынесения общего множителя за скобки.

Обратим внимание на то, что техника решения уравнений позволяет обучать школьников выбору более простого алгоритма решения уравнения. Учителя обычно учат переносить все слагаемые с иксом в левую часть уравнения, а без икса — в правую. Для управления коллективной работой это полезно, а когда учащиеся обучены решению уравнений, надо обязательно показать, что в некоторых случаях бывает полезно слагаемые с иксом переносить в правую часть уравнения, а без икса — в левую. Бывает полезно не раскрывать скобки, а сначала делить обе части уравнения на числовой множитель, стоящий перед скобками, умножать обе части уравнения на (–1) и т. п. Такой подход к технике решения уравнений помогает воспитывать у учащихся творческий подход к решению поставленной задачи.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **219–220**.

Решения и комментарии

Решите уравнение **(625–629).**

625. а) $2x - 6 = 0$; в) $-x + 7 = 0$.

Решение. Здесь и далее справа от вертикальной черты указано действие, выполняемое с двумя частями уравнения.

а) $2x - 6 = 0; \mid + 6$
$2x = 6; \mid : 2$
$x = 3$;

в) $-x + 7 = 0; \mid - 7$
$-x = -7; \mid \cdot (-1)$
$x = 7$.

Приведём другой способ решения тех же уравнений.

а) $2x - 6 = 0; \mid : 2$
$x - 3 = 0; \mid + 3$
$x = 3$;

в) $-x + 7 = 0; \mid \cdot (-1)$
$x - 7 = 0; \mid + 7$
$x = 7$.

626. а) $3x + 2x = 10$; в) $4x + 2x - 7 = 5$.

Решение. При решении уравнений применим распределительный закон.

а) $3x + 2x = 10$;
$(3 + 2)x = 10$;
$5x = 10; \mid : 5$
$x = 2$;

в) $4x + 2x - 7 = 5$;
$(4 + 2)x - 7 = 5$;
$6x - 7 = 5; \mid + 7$
$6x = 12; \mid : 6$
$x = 2$.

627. а) $x + 3 = 3x - 7$; в) $7x + 2 = 3x - 10$.

Решение.

а) $x + 3 = 3x - 7; \mid - x$
$3 = 3x - x - 7$;
$3 = (3 - 1)x - 7; \mid + 7$
$10 = 2x; \mid : 2$
$5 = x$;
$x = 5$;

в) $7x + 2 = 3x - 10; \mid - 3x$
$7x - 3x + 2 = -10$;
$(7 - 3)x + 2 = -10$;
$4x + 2 = -10; \mid - 2$
$4x = -12; \mid : 4$
$x = -3$.

629. а) $3(x + 2) - x = 10$; в) $4x + 3(x - 7) = 5$.

Решение.

а) $3(x + 2) - x = 10$;
$3x + 6 - x = 10; \mid - 6$
$3x - x = 10 - 6$;
$(3 - 1)x = 4$;
$2x = 4; \mid : 2$
$x = 2$;

в) $4x + 3(x - 7) = 5$;
$4x + 3x - 21 = 5$;
$(4 + 3)x - 21 = 5$;
$7x - 21 = 5; \mid + 21$
$7x = 26; \mid : 7$
$x = \frac{26}{7}$;
$x = 3\frac{5}{7}$.

Промежуточный контроль. С–22, Т–29.

3.10. Решение задач с помощью уравнений

В данном пункте рассмотрено применение уравнений для решения текстовых задач. Следует учесть, что на первых порах учащиеся не будут понимать, почему надо решать задачи новым способом, если они умеют решать их арифметически. Здесь надо сказать, что мы учимся решать знакомые задачи новым способом, чтобы в дальнейшем применять его для более сложных задач, решение которых арифметическим способом или очень сложно, или невозможно. При этом следует привести примеры задач, проще решаемых с помощью уравнения, чем арифметическим способом.

Обратим внимание на то, что в пункте 1 Дополнений к главе 3 имеются задачи **672–676** для обучения учащихся составлению буквенных выражений и уравнений по условиям текстовых задач.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **221–226**.

Решения и комментарии

647. Десяти собакам и кошкам скормили 56 галет. Каждой собаке досталось 6 галет, а каждой кошке — 5. Сколько было собак и сколько кошек?

Решение. Пусть было x собак, тогда кошек было $10 - x$. Составим уравнение и решим его:

$$6x + 5\,(10 - x) = 56;$$

$$6x + 50 - 5x = 56; \mid -50$$

$$6x - 5x = 6;$$

$$x = 6.$$

Следовательно, было 6 собак и $10 - 6 = 4$ кошки.

Ответ. 6 собак и 4 кошки.

Замечание 1. Через x можно обозначить число кошек, но это приведёт к более трудному для решения уравнению. С учащимися надо обсуждать различные способы обозначения неизвестного буквой, чтобы они приучались выбирать наиболее простые способы решения задач.

Замечание 2. Если задачу **647** решать арифметическим способом, то придётся сначала сделать предположение: предположим, что были только кошки, тогда

1) $5 \cdot 10 = 50$ (галет) — досталось бы 10 кошкам;

2) $56 - 50 = 6$ (галет) — осталось бы сверх 50 галет, т. е. досталось бы собакам;

3) $6 - 5 = 1$ (галета) — приходится на каждую собаку;

4) $6 : 1 = 6$ (собак) — было;

5) $10 - 6 = 4$ (кошки) — было.

Ответ. 6 собак и 4 кошки.

650. а) Сумму в 74 р. заплатили девятнадцатью монетами по 2 р. и 5 р. Сколько было монет по 2 р.?

Решение. Пусть было x монет по 5 р. и $(19 - x)$ монет по 2 р. Составим уравнение и решим его:

$$5x + 2\,(19 - x) = 74;$$

$$5x + 38 - 2x = 74; \mid -38$$

$$5x - 2x = 36;$$

$$3x = 36; \mid :3$$

$$x = 12.$$

Следовательно, было 12 монет по 5 р. и $19 - 12 = 7$ монет по 2 р.

Ответ. 7 монет.

Замечание 1. Здесь через x можно обозначить число монет по 2 р., но это приведёт к более трудному для решения уравнению.

Замечание 2. Если задачу **650** решать арифметическим способом, то придётся сначала сделать предположение: предположим, что были только монеты по 2 р., тогда

1) $2 \cdot 19 = 38$ (р.) — приходится на 19 монет по 2 р.;

2) $74 - 38 = 36$ (р.) — «избыток» в сумме, приходящийся на монеты по 5 р.;

3) $5 - 2 = 3$ (р.) — «избыток», приходящийся на каждую монету по 5 р.;

4) $36 : 3 = 12$ (монет) — по 5 р. было;

5) $19 - 12 = 7$ (монет) — по 2 р. было.

Ответ. 7 монет.

Если сопоставление разных способов решения задачи проводится для более простых задач (на части, на нахождение двух чисел по их сумме и разности), то полезно показать, что оба решения содержат одни и те же действия.

Промежуточный контроль. С–23, Т–30, К–5.

Дополнения к главе 3

1. Буквенные выражения

В данном пункте вводятся понятия буквенного выражения, значения буквенного выражения. Здесь имеются задачи **672–676** для обучения учащихся составлению буквенных выражений по условиям текстовых задач, а также задачи **677–679**, с помощью которых можно алгебраически обосновать применявшийся ранее способ решения задач на нахождение двух чисел по их сумме и разности.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **208–212**.

Решения и комментарии

672. Решите задачу, составив буквенное выражение.

а) Книга стоит x р. Сколько стоят 8 таких книг?

б) Купили 10 тетрадей по x р. и 3 ручки по 3 р. Сколько заплатили?

в) Купили x линеек по 40 к. и 4 тетради по 50 к. Сколько сдачи получили с 5 р.?

Ответ. а) 8 таких книг стоят $8x$ р.

б) За покупку заплатили $10x + 3 \cdot 3$, т. е. $(10x + 9)$ р.

в) Получили сдачи $500 - 40x - 4 \cdot 50$, т. е. $(300 - 40x)$ к.

674. а) Через одну трубу можно наполнить бассейн за a мин, а через другую — за b мин. Через сколько минут наполнится бассейн, если открыть обе трубы? Составьте буквенное выражение для получения ответа, найдите его значение при: $a = 30$, $b = 20$.

Решение. Через первую трубу за минуту наполняется $\frac{1}{a}$ часть бассейна, а через вторую трубу — $\frac{1}{b}$ часть бассейна, через две трубы наполнится $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{a+b}{ab}$ часть бассейна. Тогда бассейн наполнится за $1 : \frac{a+b}{ab} = \frac{ab}{a+b}$ минут.

Если $a = 30$, $b = 20$, то бассейн наполнится за $\frac{20 \cdot 30}{20+30} = 12$ минут.

Ответ. Через 12 мин.

Замечание. В случае затруднения при решении задачи в общем виде надо записать её решение для известных числовых данных 30 и 20, а затем выполнить аналогичные действия с буквами.

677. Докажите, что если из суммы двух чисел вычесть их разность, то получится удвоенное меньшее число, т. е. для любых чисел a и b ($a > b$) верно равенство $(a + b) - (a - b) = 2b$.

Решение. Воспользовавшись правилами раскрытия скобок, имеем

$$(a + b) - (a - b) = \underline{a} + b \underline{- a} + b = 2b.$$

678. Докажите, что для любых чисел a и b ($a > b$) верно равенство

$$(a + b) + (a - b) = 2a.$$

Сформулируйте доказанное свойство суммы и разности двух чисел в виде правила.

Решение. Воспользовавшись правилами раскрытия скобок, имеем

$$(a + b) + (a - b) = a \underline{+ b} + a \underline{- b} = 2a.$$

Если к сумме двух чисел прибавить их разность, то получится удвоенное большее число.

679. В старину для решения задач пользовались такими правилами: чтобы по сумме и разности двух чисел найти большее число, надо к полусумме двух чисел прибавить их полуразность; чтобы найти меньшее число, надо из полусуммы двух чисел вычесть их полуразность. Докажите равенства:

а) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = a$; б) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = b$.

Решение. Здесь, естественно, предполагается, что $a > b$.

а) $\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b+a-b}{2} = \frac{2a}{2} = a$;

б) $\frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b-(a-b)}{2} = \frac{a+b-a+b}{2} = \frac{2b}{2} = b.$

680. а) Сумма двух чисел равна 37, а разность 13. Найдите эти числа.

Решение. Пользуясь правилами, приведёнными в задаче **679**, получим:

1) $\frac{37}{2} + \frac{13}{2} = 25$ — большее число;

2) $\frac{37}{2} - \frac{13}{2} = 12$ — меньшее число.

Ответ. 25 и 12.

Замечание. Меньшее число можно найти вычитанием: 37 – 25 = 12.

2. Фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой

В данном пункте приведен материал, расширяющий и дополняющий представления школьников о геометрических объектах. Здесь рассматриваются фигуры на плоскости, симметричные относительно прямой, приводятся примеры построения фигур, симметричных заданным, с помощью циркуля и линейки, показывается построение точки, симметричной данной точке относительно прямой, с помощью одного циркуля.

Решения и комментарии

700. Дана прямая b и отрезок AB, пересекающий эту прямую. Постройте отрезок MN, симметричный отрезку AB относительно прямой b. Где лежит точка пересечения отрезков AB и MN? Как это объяснить?

Решение. Отметим, что в учебнике описаны два способа построения точки, симметричной данной точке относительно данной прямой (задача 1), поэтому здесь описание построения опускается.

При осевой симметрии точки оси симметрии b переходят в себя, поэтому если отрезок AB пересекает прямую b в точке K, то эта точка перейдёт в точку, принадлежащую отрезку MN, которая совпадает с точкой K. Она и является точкой пересечения отрезков AB и MN (рис. 15).

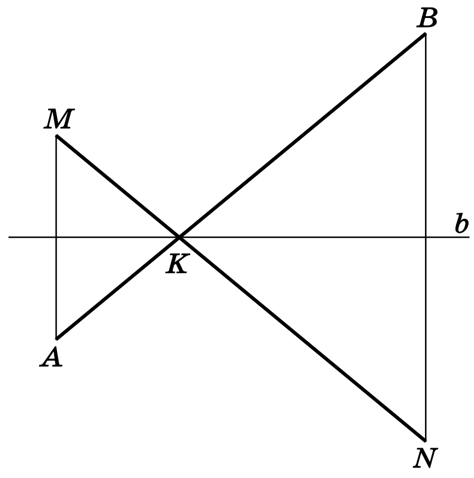

Рис. 15

Итак, точка пересечения симметричных отрезков лежит на оси симметрии. (Этим можно воспользоваться, проверяя работы учащихся обходом по классу, а потом раскрыть учащимся секрет своей быстрой проверки.)

704. На плане (рис. 16) показана железная дорога и два города A и B. Укажите место на железной дороге, где надо построить станцию C, чтобы суммарная длина дороги от A до C и от C до B была наименьшей.

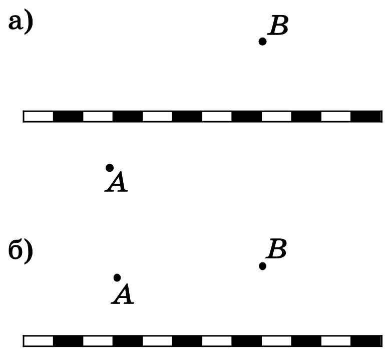

Рис. 16

Решение. В случае, изображённом на рисунке 16, *а*, станцию C надо строить на пересечении прямой AB с железной дорогой.

В случае, изображённом на рисунке 16, *б*, надо сначала построить точку A_1, симметричную точке A относительно железной дороги. Станцию C надо строить на пересечении прямой A_1B с железной дорогой, так как путь A_1B кратчайший между точками A_1 и B, а $AC + CB = A_1C + CB$. В учебнике описано это построение (задача 3), поэтому здесь описание построения опускается.

3. Исторические сведения

В данном пункте приведены сведения об истории развития понятия рационального числа, введено понятие замкнутости множества относительно операции.

4. Занимательные задачи

В данном пункте приведены занимательные задачи разнообразного содержания, для решения которых используются нестандартные рассуждения.

Решения и комментарии

708. Один автолюбитель рассказывал: «Я отправился путешествовать на «Москвиче», имея одно запасное колесо. Время от времени я заменял колёса, и оказалось, что первое колесо проехало 1000 км, второе — 900 км, третье — 800 км, четвёртое — 700 км и пятое — 600 км». Сколько километров проехал автомобиль?

Может ли автомобилист так менять колёса, чтобы первое колесо проехало 1400 км, второе — 1200 км, третье — 1000 км, четвёртое — 800 км и пятое — 600 км?

Решение. Общий пробег пяти колёс составил 4000 км. Так как машина четырёхколёсная, то она проехала 4000 : 4 = 1000 (км). Второй случай невозможен, так как машина проехала 5000 : 4 = 1125 (км), и при этом первое колесо не могло проехать 1400 км.

709. Среди математиков каждый седьмой — философ, а среди философов каждый девятый — математик. Кого больше: философов или математиков?

Решение. Одни и те же люди — математики, являющиеся философами (они же философы, являющиеся математиками), — составляют седьмую часть от числа математиков и девятую часть от числа философов. Поэтому философов больше, чем математиков (рис. 17).

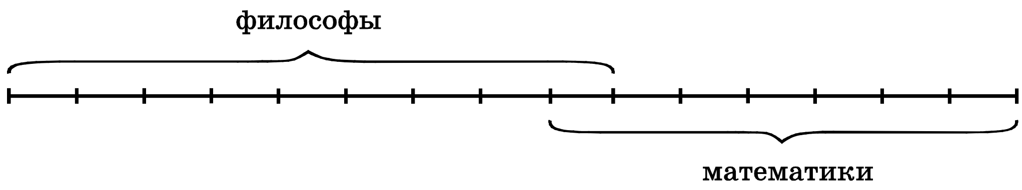

Рис. 17

Ответ. Философов больше, чем математиков.

710. Восемь подружек решили обменяться фотографиями так, чтобы у каждой из них оказались фотографии остальных подруг. Сколько фотографий для этого потребуется?

Решение. Каждая из восьми подружек должна получить по 7 фотографий, поэтому потребуется $8 \cdot 7 = 56$ фотографий.

Ответ. 56 фотографий.

711. В нашем классе каждая девочка дружит ровно с тремя мальчиками, а каждый мальчик дружит ровно с двумя девочками. Сколько учащихся в нашем классе, если мальчиков на 5 больше, чем девочек?

Решение. Пусть в классе x девочек и $x + 5$ мальчиков. Представим, что каждая девочка пожала руку каждому мальчику, с которым она дружит. У всех девочек получилось $3x$ рукопожатий. Если те же рукопожатия подсчитают мальчики, то получится $2(x + 5)$ рукопожатий. Осталось приравнять полученные результаты и решить уравнение.

Ответ. 25 учащихся.

712. В первенстве по футболу принимают участие 8 команд. Каждая команда играет с каждой по одному разу. За выигрыш команда получает 2 очка, за ничью — 1 очко, за проигрыш — 0 очков. Какая наибольшая и какая наименьшая разница очков может быть между первым и последним местом, если известно, что первое место заняла одна команда и последнее место заняла одна команда?

Решение. Присвоим команде, занявшей первое место, номер 1, а команде, занявшей последнее место, номер 8. Наибольшая разница очков получится, если команда 1 выиграет все 7 встреч, а команда 8 проиграет все

7 встреч. Тогда команда 1 получит на 14 очков больше, чем команда 8. Наименьшая разница очков получится, если все команды, кроме 1 и 8, сыграют с ними вничью. Тогда команда 1 получит на 2 очка больше, чем команда 8.

Ответ. 14 очков и 2 очка.

713. Большая коробка конфет в 2 раза дороже маленькой. Хотят купить 3 большие коробки и 2 маленькие, но если купить 2 большие коробки и 3 маленькие, то покупка будет дешевле на 15 р. Сколько стоит каждая коробка конфет?

Решение. За каждую большую коробку платят как за две маленькие, значит, на те же деньги первый раз можно было купить 8 маленьких коробок, а во второй — 7 маленьких коробок. Разница 15 р. и составляет как раз стоимость одной маленькой коробки. Большая коробка стоит в 2 раза дороже — 30 р.

Ответ. 15 р. и 30 р.

714. Один экскаватор может вырыть траншею за 30 ч, другой — за 20 ч. Первый проработал 9 ч, потом второй закончил работу. За сколько часов была выполнена работа?

Решение.

1) $1 : 30 = \frac{1}{30}$ (работы) — выполняет первый экскаватор за 1 ч;

2) $1 : 20 = \frac{1}{20}$ (работы) — выполняет второй экскаватор за 1 ч;

3) $9 \cdot \frac{1}{30} = \frac{3}{10}$ (работы) — выполнил первый экскаватор за 9 ч;

4) $1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$ (работы) — осталось выполнить второму экскаватору;

5) $\frac{7}{10} : \frac{1}{20} = 14$ (ч) — время работы второго экскаватора;

6) $9 + 14 = 23$ (ч) — время выполнения всей работы.

Ответ. За 23 ч.

719. *Старинная задача.* Для перевозки 25 зеркал нанят извозчик с условием заплатить ему по 1 р. 50 к. за доставку каждого зеркала в целости и вычесть с него по 5 р. за каждое разбитое им зеркало. На дороге извозчик действительно разбил несколько зеркал и за перевозку получил только 18 р. Сколько зеркал он доставил в целости?

Решение. Пусть извозчик доставил в целости x зеркал. Тогда он разбил $(25 – x)$ зеркал. Составим уравнение:

$$1\frac{1}{2}x - 5\,(25 - x) = 18.$$

Решив его, получим, что $x = 22$.

Ответ. 22 зеркала.

720. Первый мастер шьёт шубу за 5 дней, а второй — за 3 дня. Как распределить между ними заказ на пошив 9 шуб, чтобы каждый сшил целое число шуб и заказ был выполнен в кратчайший срок?

Решение. Очевидно, что наименьшее время выполнения заказа получится тогда, когда мастера работают одновременно. Решим задачу на совместную работу.

1) $1 : 5 = \frac{1}{5}$ (шубы) — шьёт первый мастер в день;

2) $1 : 3 = \frac{1}{3}$ (шубы) — шьёт второй мастер в день;

3) $\frac{1}{5} + \frac{1}{3} = \frac{8}{15}$ (шубы) — шьют 2 мастера в день при совместной работе;

4) $9 : \frac{8}{15} = \frac{135}{8}$ (дня) — время выполнения заказа при совместной работе;

5) $\frac{135}{8} \cdot \frac{1}{5} = 3\frac{3}{8}$ (шубы) — сошьёт первый мастер при совместной работе;

6) $9 - 3\frac{3}{8} = 5\frac{5}{8}$ (шубы) — сошьёт второй мастер при совместной работе.

Те же ответы можно получить, разделив 9 шуб обратно пропорционально времени пошива одной шубы, т. е. в отношении 3 : 5.

1) $\frac{9 \cdot 3}{3+5} = 3\frac{3}{8}$ (шубы) — сошьёт первый мастер;

2) $9 - 3\frac{3}{8} = 5\frac{5}{8}$ (шубы) — сошьёт второй мастер.

Так как при совместной работе каждый мастер сошьёт дробное число шуб, то придётся согласиться с тем, чтобы один из них закончил работу раньше другого. Нужно рассмотреть два случая: первый и второй мастера пошьют 3 и 6 или 4 и 5 шуб соответственно.

В первом случае мастера будут работать $3 \cdot 5 = 15$ (дней) и $6 \cdot 3 = 18$ (дней), заказ будет выполнен за 18 дней. Во втором случае они будут работать $4 \cdot 5 = 20$ (дней) и $5 \cdot 3 = 15$ (дней), заказ будет выполнен за 20 дней. Первый способ распределения заказа даёт выигрыш во времени.

Но задачу можно решить ещё проще. Первый мастер шьёт одну шубу 5 дней, а 3 шубы 15 дней. Второй мастер шьёт одну шубу 3 дня, а 5 шуб 15 дней. Значит, за 15 дней совместной работы они сошьют 8 шуб. Оставшуюся девятую шубу лучше отдать шить второму мастеру, тогда заказ будет выполнен в минимальный срок 18 дней. Первому мастеру нужно дать 3 шубы, второму — 6.

Ответ. 3 шубы и 6 шуб.

721. Три пирата Джон, Джек и Билл откопали кувшин с золотыми. Джон хотел взять себе треть всех золотых и половину остатка дать Джеку. Джек хотел взять себе половину всех золотых и треть остатка дать Джону. На каком варианте дележа они остановились, Билл не помнит, но он точно знает, что ему досталось 50 золотых. Сколько золотых было в кувшине?

Решение. Ответ не зависит от того, какой вариант дележа выберут Джон и Джек, так как в первом случае Биллу достанется

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3} \text{ найденной суммы,}$$

а во втором

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3} \text{ найденной суммы.}$$

В кувшине было $50 \cdot 3 = 150$ золотых.

Ответ. 150 золотых.

722. Имея полный бак топлива, рыбак может проплыть на моторной лодке 20 км против течения или 30 км по течению реки. На какое наибольшее расстояние он может отплыть по реке при условии, что топлива должно хватить и на обратный путь? Движение с выключенным мотором не рассматривается.

Решение. На каждый километр пути при движении по течению и против течения расходуется $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{1}{12}$ бака топлива, значит, наибольшее расстояние, на которое может отплыть рыбак, равно $1 : \frac{1}{12} = 12$ км.

Ответ. 12 км.

Замечание. В задаче не учитывается случай, когда часть пути по течению реки рыбак будет плыть без топлива — лодку сносит течение, а также случай, когда рыбак использует вёсла.

723. Остап купил 4 новых колеса для своего автомобиля. Он знает, что передние колёса автомобиля изнашиваются через 12 тыс. км пробега, а задние — через 8 тыс. км пробега. Какой наибольший путь может проехать автомобиль, если Остап догадается вовремя поменять задние колёса с передними?

Решение. Если бы задние колёса меняли с передними через каждую тысячу километров, то на 2000 км расходовалось бы $\frac{1}{12} + \frac{1}{8} = \frac{5}{24}$ ресурса каждого колеса, т. е. 2000 км составляют $\frac{5}{24}$ наибольшего пути, который равен $2000 : \frac{5}{24} = 9600$ км.

Ответ. 9600 км.

Глава 4. Десятичные дроби

В этой главе изучаются сначала положительные, потом и отрицательные десятичные дроби. Подчёркивается, что десятичные дроби — это другая форма записи рациональных чисел. Схема изучения десятичных дробей та же, что и ранее, но справедливость законов арифметических действий уже не надо доказывать, так как это частный случай доказанных ранее законов.

Нужно обратить внимание учащихся на схожесть правил действий над десятичными дробями и целыми числами.

Рассмотрение десятичных дробей после рациональных чисел связано с многими причинами. Прежде всего, они частный случай рациональных чисел. Кроме того, при делении десятичной дроби на десятичную дробь не всегда получается десятичная дробь. Например, $0{,}1 : 0{,}3 = \frac{1}{3}$, и эта обыкновенная дробь не записывается в виде конечной десятичной дроби. Поэтому нужно вводить приближения десятичных дробей.

В данной главе много внимания уделено приближённым вычислениям, ведь для работы с десятичными дробями иногда приходится заменять их приближениями, так как «длинные» десятичные дроби не удобны для вычислений. Таким образом, возникает потребность в приближённых вычислениях.

Цель изучения главы:

- научить действиям с десятичными дробями и приближённым вычислениям;
- научить применять десятичные дроби в практических расчётах и при решении текстовых задач.

Материал, связанный с десятичными дробями, излагается с опорой на уже известные теоретические сведения.

Здесь же показываются новые приёмы решения основных задач на проценты, сводящиеся к умножению и делению на десятичную дробь, а также способы решения сложных задач на проценты.

При наличии учебных часов рассматриваются темы «Вычисления с помощью калькулятора», «Процентные расчёты с помощью калькулятора» и «Фигуры в пространстве, симметричные относительно плоскости».

4.1. Понятие положительной десятичной дроби

В данном пункте учебника вводятся понятия положительной десятичной дроби, её разрядов. Основная цель этого пункта — освоение учащимися нового способа записи положительных рациональных чисел, знаменатель которых является степенью числа 10, обучение учащихся чтению и записи десятичных дробей, использованию десятичных дробей для перехода от крупных единиц измерения к мелким и от мелких к крупным.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **227–235**.

Решения и комментарии

733. Выразите в метрах и сантиметрах: б) 8,54 м; в) 6,02 м; г) 6,2 м.

Решение. б) 8,54 м = 8 м 54 см; в) 6,02 м = 6 м 02 см = 6 м 2 см;

г) 6,2 м = 6 м 20 см.

735. Выразите в килограммах и граммах: г) 8,530 кг; д) 8,500 кг.

Решение. г) 8,530 кг = 8 кг 530 г; д) 8,500 кг = 8 кг 500 г.

736. Выразите в тоннах и килограммах: а) 0,435 т; б) 4,350 т; в) 5,024 т.

Решение. а) 0,435 т = 0 т 435 кг = 435 кг; б) 4,350 т = 4 т 350 кг;

в) 5,024 т = 5 т 024 кг = 5 т 24 кг.

737. Запишите величину, используя десятичные дроби:

б) 5 м 6 дм; г) 8 м 4 см.

Решение. б) 5 м 6 дм = $5\frac{6}{10}$ м = 5,6 м;

г) 8 м 4 см = $8\frac{4}{100}$ м = 8,04 м.

738. Выполните действия:

а) 8,23 м + 3,56 м; б) 7,39 р. – 6,27 р.;

в) 0,3 дм · 0,2 дм; д) 4,62 км : 2 с.

Решение. Подчеркнём ещё раз: так как действия с десятичными дробями ещё не изучены, то вычисления следует проводить со смешанными дробями.

а) $8{,}23$ м + $3{,}56$ м = $8\frac{23}{100}$ м + $3\frac{56}{100}$ м = $11\frac{79}{100}$ м = $11{,}79$ м;

б) $7{,}39$ р. – $6{,}27$ р. = $7\frac{39}{100}$ р. – $6\frac{27}{100}$ р. = $1\frac{12}{100}$ р. = $1{,}12$ р.;

в) $0{,}3$ дм · $0{,}2$ дм = $\frac{3}{10}$ дм · $\frac{2}{10}$ дм = $\frac{6}{100}$ дм^2 = $0{,}06$ дм^2;

д) $4{,}62$ км : 2 с = $4\frac{62}{100}$ км : 2 с = $2\frac{31}{100}$ км/с = $2{,}31$ км/с.

4.2. Сравнение положительных десятичных дробей

В данном пункте учебника рассматривается сравнение десятичных дробей. Сначала объясняется (с помощью перехода к обыкновенным дробям), почему в записи десятичной дроби можно после запятой приписать (или отбросить) нули справа. Правило сравнения десятичных дробей слишком сложно для воспроизведения, поэтому будет достаточно, если учащиеся научатся правильно сравнивать десятичные дроби по разрядам. Закреплению понимания такого сравнения способствует использование задания **756** на сравнение величин, записанных с помощью десятичных дробей.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **236–243**.

Решения и комментарии

751. а) Укажите число, большее одного из данных чисел, но меньшее другого: 0,6 и 0,7.

Решение. Так как $0{,}6 = 0{,}60$, $0{,}7 = 0{,}70$, то верно двойное неравенство

$$0{,}60 < 0{,}61 < 0{,}70.$$

Дополнительный вопрос. Сколько таких чисел можно указать? (**Ответ.** Бесконечно много: 0,61, 0,62, …, 0,69, 0,601, 0,602, …, 0,699, … .)

756. Запишите величины с помощью десятичных дробей и сравните их:

а) 7 кг 485 г и 6 кг 90 г; в) 7 км 740 м и 7 км 74 м.

Решение.

а) 7 кг 485 г = 7,485 кг;   6 кг 90 г = 6,090 кг;

так как 7,485 > 6,090, то 7 кг 485 г > 6 кг 90 г.

в) 7 км 740 м = 7,740 км;   7 км 74 м = 7,074 км;

так как 7,740 > 7,074, то 7 км 740 м > 7 км 74 м.

Промежуточный контроль. С–24, Т–31, Т–32.

4.3. Сложение и вычитание положительных десятичных дробей

В данном пункте учебника вводятся операции сложения и вычитания десятичных дробей. Сначала объясняется (с помощью перехода к обыкновенным дробям), что складывают (и вычитают) десятичные дроби по разрядам, дописывая в случае необходимости нули справа после запятой. Главный вывод, к которому нужно подвести учащихся, что десятичные дроби складывают и вычитают так же, как натуральные числа, подписывая числа друг под другом так, чтобы запятая оказалась под запятой.

Закреплению навыков сложения и вычитания десятичных дробей поможет решение несложных задач **769–776**.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **244–247**.

Решения и комментарии

762. а) Вычислите, применяя законы сложения и правила раскрытия скобок: 7,48 + 3,19 + 1,12 + 6,81.

Решение. Обычно учащиеся быстро находят, как надо перегруппировать слагаемые, чтобы упростить вычисления:

$$7{,}48 + 3{,}19 + 1{,}12 + 6{,}81 = (7{,}48 + 1{,}12) + (3{,}19 + 6{,}81) = 8{,}6 + 10 = 18{,}6.$$

Здесь важно спросить: какие законы сложения мы применили (переместительный и сочетательный)? При каждом расширении множества чисел внимание учащихся обращалось на то, что в расширенном множестве чисел справедливы законы сложения и умножения, распределительный закон. Здесь уместно задать в известной мере провокационный вопрос: а можно ли применять упомянутые законы, если для десятичных дробей их справедливость не была доказана? Хорошо понимающие суть вопроса учащиеся обычно отвечают, что десятичные дроби не новое множество чисел, а другая запись некоторых рациональных чисел, для которых применение законов было обосновано.

768. а) Вычислите периметр треугольника, имеющего стороны: 490 мм, 48 см, 4,7 дм.

Решение. 490 мм + 48 см + 4,7 дм = 4,9 дм + 4,8 дм + 4,7 дм = 14,4 дм.

Ответ. 14,4 дм.

769. В квартире две комнаты. Одна комната имеет площадь 16,3 м^2, а другая на 1,9 м^2 меньше. Какова площадь двух комнат?

Решение. (16,3 – 1,9) + 16,3 = 30,7 (м^2) — площадь двух комнат.

Ответ. 30,7 м^2.

773. Боря собрал 12,6 кг яблок — это на 2,8 кг больше, чем собрал Алёша, и на 1,4 кг меньше, чем собрал Серёжа. Сколько килограммов яблок собрали мальчики вместе?

Решение. (12,6 – 2,8) + 12,6 + (12,6 + 1,4) = 36,4 (кг) — яблок собрали мальчики вместе.

Ответ. 36,4 кг.

776. Скорость катера по течению 22,5 км/ч, а против течения 18,5 км/ч. Какова собственная скорость катера?

Решение. 1) 22,5 – 18,5 = 4 (км/ч) — удвоенная скорость течения реки;

2) 4 : 2 = 2 (км/ч) — скорость течения реки;

3) 22,5 – 2 = 20,5 (км/ч) — собственная скорость катера.

Ответ. 20,5 км/ч.

Замечание. Учащиеся могут предложить другой способ решения задачи. В этом случае надо обратить их внимание на то, что деление десятичной дроби на натуральное число ещё не изучено, поэтому вычислять надо так, как показано ниже.

$$(22{,}5 + 18{,}5) : 2 = 41 : 2 = \frac{41}{2} = 20\frac{1}{2} = 20{,}5 \text{ (км/ч)}.$$

Промежуточный контроль. С–25, Т–33.

4.4. Перенос запятой в положительной десятичной дроби

В данном пункте учебника на конкретных примерах показано, как изменяется десятичная дробь при переносе в её десятичной записи запятой вправо или влево. Учащиеся должны усвоить, что для увеличения (уменьшения) десятичные дроби в 10, 100, 1000, … раз надо в её записи перенести запятую вправо (влево) на 1, 2, 3, … цифры. Понимание этого материала важно для обоснования правил умножения и деления десятичных дробей.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **248–256**.

Решения и комментарии

782. а) Какое число больше и во сколько раз: 32,549 или 325,49?

Решение. 325,49 больше числа 32,549 в 10 раз: $32{,}549 \cdot 10 = 325{,}49$.

783. а) Какое число меньше и во сколько раз: 0,4853 или 4853?

Решение. Число 0,4853 меньше числа 4853 в $10^4 = 10\,000$ раз:

$$0{,}4853 \cdot 10^4 = 4853.$$

784. Увеличьте следующие дроби в 10, 100, 1000 раз: а) 7,3459; б) 8,279.

Решение.

а) $7{,}3459 \cdot 10 = 73{,}459$; $7{,}3459 \cdot 100 = 734{,}59$; $7{,}3459 \cdot 1000 = 7345{,}9$;

б) $8{,}279 \cdot 10 = 82{,}79$; $8{,}279 \cdot 100 = 827{,}9$; $8{,}279 \cdot 1000 = 8279$.

4.5. Умножение положительных десятичных дробей

В данном пункте учебника на конкретных примерах показано, как умножают десятичные дроби. Для обоснования вычисления применяется перенос запятой в десятичной дроби вправо и влево, а также переход к умножению обыкновенных дробей. Учащиеся должны усвоить, что умножение десятичных дробей выполняется так же, как умножение натуральных чисел, но отличается тем, что в результате надо ставить запятую на нужное место.

Закреплению навыков умножения десятичных дробей поможет решение несложных задач **807–813**.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **257–266**.

Решения и комментарии

806. Известно, что $8 \cdot 125 = 1000$. Вычислите:

а) $8 \cdot 12{,}5$; б) $0{,}08 \cdot 125$; в) $0{,}8 \cdot 12{,}5$; г) $8 \cdot 0{,}125$.

Решение.

а) Так как $8 \cdot 125 = 1000$, то $8 \cdot 12{,}5 = 100{,}0 = 100$.

б) Так как $8 \cdot 125 = 1000$, то $0{,}08 \cdot 125 = 10{,}00 = 10$.

в) Так как $8 \cdot 125 = 1000$, то $0{,}8 \cdot 12{,}5 = 10{,}00 = 10$.

г) Так как $8 \cdot 125 = 1000$, то $8 \cdot 0{,}125 = 1{,}000 = 1$.

812. Масса 1 см^3 алюминия 2,7 г, масса 1 см^3 свинца 11,3 г. Какой кубик тяжелее — алюминиевый с ребром 3 см или свинцовый с ребром 2 см?

Решение.

1) $3^3 = 27$ (см^3) — объём алюминиевого кубика;

2) $2{,}7 \cdot 27 = 72{,}9$ (г) — масса алюминиевого кубика;

3) $2^3 = 8$ (см^3) — объём свинцового кубика;

4) $11{,}3 \cdot 8 = 90{,}4$ (г) — масса свинцового кубика.

Так как $72{,}9 < 90{,}4$, то свинцовый кубик тяжелее алюминиевого.

Промежуточный контроль. С–26, Т–34.

4.6. Деление положительных десятичных дробей

В данном пункте учебника на конкретных примерах показано, что деление двух положительных десятичных дробей всегда выполнимо — частное может быть записано в виде обыкновенной дроби. Так как не любая обыкновенная дробь может быть записана в виде десятичной, то в этом пункте рассмотрены лишь случаи, когда частное двух десятичных дробей есть натуральное число или десятичная дробь. Другие случаи будут рассмотрены в главе 5.

Следует отметить, что если деление десятичных дробей изучают до деления обыкновенных дробей, то возникает напряжённость, связанная с тем, что учителю нужно отбирать для рассмотрения лишь те десятичные дроби, частное которых можно записать в виде десятичной дроби.

Далее на конкретных примерах показано, как надо делить десятичную дробь на натуральное число. Затем с помощью свойства частного и переноса запятых в десятичной дроби показывается, как надо делить десятичную дробь на десятичную дробь. Для каждого случая деления формулируется соответствующее правило.

Изучением деления десятичных дробей заканчивается изучение четырёх арифметических действий с десятичными дробями. Здесь уместно перейти к использованию всех четырёх действий, а для этого надо напомнить правила выполнения действий. Поэтому в большом количестве предлагаются задания на совместные действия с десятичными и обыкновенными дробями. Учащимся можно дать такой совет: выполняйте, если возможно, действия, переходя к десятичным дробям. Если нет, то вычисляйте, переходя к обыкновенным дробям.

Закреплению навыков деления десятичных дробей поможет решение несложных задач **839–845**.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **267–275**.

Решения и комментарии

834. Сколько сотых содержится в числе: в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{7}{20}$; д) $\frac{3}{25}$?

Решение. в) $\frac{1}{2} = \frac{1\cdot 5}{2\cdot 5} = \frac{5}{10} = \frac{50}{100} = 0{,}50$ — 50 сотых;

г) $\frac{7}{20} = \frac{7\cdot 5}{20\cdot 5} = \frac{35}{100} = 0{,}35$ — 35 сотых;

д) $\frac{3}{25} = \frac{3\cdot 4}{25\cdot 4} = \frac{12}{100} = 0{,}12$ — 12 сотых.

838. а) Вычислите: $\frac{12{,}3\cdot 3{,}21}{1{,}23\cdot 32{,}1}$.

Решение. $\frac{12{,}3\cdot 3{,}21}{1{,}23\cdot 32{,}1} = \frac{1{,}23\cdot 10\cdot 3{,}21}{1{,}23\cdot 32{,}1} = \frac{1{,}23\cdot 32{,}1}{1{,}23\cdot 32{,}1} = 1.$

Учащиеся должны заметить, что здесь не нужно выполнять умножение, так как и в числителе, и в знаменателе для вычисления произведения надо 123 умножить на 321 и отделить три цифры запятой справа.

839. На прямолинейном участке железнодорожного пути уложены рельсы длиной 12,5 м. Сколько рельсов уложено на 1 км пути?

Решение. Здесь важно учесть, что рельсы укладывают в два ряда.

1) 1 км = 1000 м;

2) 1000 : 12,5 · 2 = 10 000 : 125 · 2 = 160 (рельсов).

Ответ. 160 рельсов.

Промежуточный контроль. С–27, Т–36, К–6.

4.7. Десятичные дроби и проценты

В данном пункте учебника на конкретных примерах показано применение десятичных дробей для решения задач на проценты. Ранее эти задачи решались при изучении первой главы — сначала нахождением одного процента, а затем нескольких процентов числа или числа по нескольким его процентам. Первые задачи такого рода решались по действиям. Затем было показано применение умножения и деления на дробь. Теперь этот последний способ решения видоизменяется применением десятичных дробей.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **276–280**.

Решения и комментарии

859. Виноград при сушке теряет 65% своей массы. Сколько изюма (сушёного винограда) получится из 400 кг; 350 кг; 1,8 т свежего винограда?

Решение. 1) 100 – 65 = 35 (%) — составляет масса изюма от массы свежего винограда;

2) 400 · 0,35 = 140 (кг) — изюма получится из 400 кг свежего винограда;

3) 350 · 0,35 = 122,5 (кг) — изюма получится из 350 кг свежего винограда;

4) 1,8 · 0,35 = 0,63 (т) — изюма получится из 1,8 т свежего винограда.

860. Трава при сушке теряет 85% своей массы.

а) Сколько сена получится из 600 кг; 1500 кг; 11,8 т свежей травы?

б) Сколько травы надо накосить, чтобы насушить 1500 кг; 3300 кг; 3,6 т сена?

Решение.

а) 1) 100 – 85 = 15 (%) — составляет масса сена от массы свежей травы;

2) 600 · 0,15 = 90 (кг) — сена получится из 600 кг свежей травы;

3) 1500 · 0,15 = 225 (кг) — сена получится из 1500 кг свежей травы;

4) 11,8 · 0,15 = 1,77 (т) — сена получится из 11,8 т свежей травы.

б) 1) 1500 : 0,15 = 10 000 (кг) — травы надо накосить, чтобы насушить 1500 кг сена;

2) 3300 : 0,15 = 22 000 (кг) — травы надо накосить, чтобы насушить 3300 кг сена;

3) 3,6 : 0,15 = 24 (т) — травы надо накосить, чтобы насушить 3,6 т сена.

862. Товар стоил 150 р. Его цена повысилась на 12%. Сколько теперь стоит этот товар?

Решение. *I способ.* 1) 150 · 0,12 = 18 (р.) — разница в цене;

2) 150 + 18 = 168 (р.) — новая цена товара.

II способ. 1) 100 + 12 = 112 (%) — составляет новая цена от прежней;

2) 150 · 1,12 = 168 (р.) — новая цена товара.

Ответ. 168 р.

Замечание. Второй способ решения задачи **862** необходимо усвоить учащимся, чтобы понять материал следующего пункта учебника.

865. б) Можно ли цену товара уменьшить на 101%?

Решение. Конечно же, нет, если не считать, что возможна ситуация, когда товар не только отдадут даром (понизят цену на 100%), но ещё и доплатят покупателю 1% первоначальной цены этого товара.

Промежуточный контроль. С–28, Т–37, Т–38.

4.8. Сложные задачи на проценты

В данном пункте учебника на конкретных примерах показано применение так называемых простых и сложных процентов, имеющее большое практическое значение. Аналогичные задачи решены в общем виде.

Здесь имеются задачи на смеси (сплавы), а также задачи, для решения которых необходимо ввести лишнее неизвестное. Некоторые из них можно оставить для повторения.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать выполнение заданий **281–286**.

Решения и комментарии

866. Число 200 увеличили на 20%, полученный результат уменьшили на 20%. Получится ли в результате число 200? Какое число получится?

Решение. *I способ.* 1) $200 \cdot 0{,}20 = 40$ — на столько увеличили число 200;

2) $200 + 40 = 240$ — результат увеличения числа 200 на 20%;

3) $240 \cdot 0{,}20 = 48$ — на столько уменьшили число 240;

4) $240 - 48 = 192$ — результат уменьшения числа 240 на 20%.

Число 200 не получилось, так как это число сначала увеличили на 40, а потом уменьшили на 48.

II способ. Так как два первых действия в предыдущем решении можно записать в виде $200 + 200 \cdot 0{,}20 = 200 \cdot (1 + 0{,}20) = 200 \cdot 1{,}20$, то увеличение числа 200 на 20% можно выполнить в свёрнутом виде: $200 \cdot 1{,}20 = 240$.

Аналогично уменьшение числа 240 на 20% можно выполнить в свёрнутом виде: $240 \cdot (1 - 0{,}20) = 240 \cdot 0{,}80 = 192$.

Оба эти рассуждение необходимо провести, при этом не следует торопиться отбрасывать нули после запятой в записи десятичной дроби 1,20, так как учащиеся должны наглядно видеть, где используется условие «20%» при решении задачи.

Ответ. 192.

867. а) Число a увеличили на 20%, полученное число увеличили ещё на 20%. Во сколько раз увеличилось число a? На сколько процентов увеличилось число a за два раза?

Решение. Число a увеличили на 20%, получили число $a \cdot 1{,}20 = 1{,}2a$. Потом число $1{,}2a$ увеличили на 20%, получили число $1{,}2a \cdot 1{,}20 = 1{,}44a$. Число a увеличилось в 1,44 раза. Так как $1{,}44a = a + 0{,}44a$, число a увеличилось на $0{,}44a$, или на 44 %.

869. а) Некоторую сумму положили в банк под 20% годовых. Во сколько раз увеличится вложенная сумма за 5 лет, если начисляют простые проценты?

б) Некоторую сумму положили в банк под 20% годовых. Во сколько раз увеличится вложенная сумма за 4 года, если начисляют сложные проценты?

Решение. а) Пусть на счёт положили a р. За 5 лет эта сумма превратилась в $(a + 5 \cdot 0{,}20a = 2a)$ р. Или по формуле простых процентов: $(a \cdot (1 + 5 \cdot 0{,}2) = 2a)$ р., т. е. за 5 лет сумма увеличилась в 2 раза.

б) Пусть на счёт положили a р. За 4 года эта сумма превратилась в $a \cdot (1 + 0{,}2)^4$ р. $= 2{,}0736a$ р., т. е. за 4 года сумма увеличилась более чем в 2 раза.

Ответ. а) В 2 раза; б) в 2,0736 раза.

873. Служащая фирмы сказала: «Производство продукции нашей фирмы увеличится на 200%, или в 2 раза». Исправьте её ошибку, если верно условие: а) на 200%; б) в 2 раза.

Решение. а) Если производство продукции увеличилось на 200%, то оно теперь составляет 100 + 200 = 300 (%) от первоначального количества производимой продукции. Увеличение в 300 : 100 = 3 раза.

б) Если производство продукции увеличилось в 2 раза, то оно составило $100 \cdot 2 = 200$ (%) от первоначального количества производимой продукции. Увеличение составило 200 – 100 = 100 (%).

874. Две противоположные стороны прямоугольника увеличили на 10%. На сколько процентов увеличилась его площадь? Зависит ли результат от того, какую пару сторон увеличили на 10%?

Решение. Пусть длина и ширина прямоугольника a см и b см. Тогда его площадь равна ab см^2.

Если увеличили длину прямоугольника на 10%, то она составила $1{,}10a$ см, а площадь нового прямоугольника составила $1{,}10ab$ см^2. Это на $0{,}10ab$ см^2, или на 10%, больше, чем ab см^2.

Ответ не изменится, если увеличить на 10% ширину прямоугольника.

Ответ. На 10%.

878. В драмкружке число мальчиков составляет 80% от числа девочек. Сколько процентов составляет число девочек от числа мальчиков в этом кружке?

Решение. Пусть в драмкружке было d девочек. Тогда мальчиков было $0{,}8d$. Число девочек в этом кружке составляет $\frac{d \cdot 100}{0{,}8d}$ = 125 (%) от числа мальчиков.

Ответ. 125%.

879. Имеется 600 г раствора, содержащего 15% соли. Сколько воды требуется добавить в раствор, чтобы он стал содержать 10% соли?

Решение. 1) $600 \cdot 0{,}15 = 90$ (г) — соли содержится в растворе;

2) $90 : 0{,}1 = 900$ (г) — раствора должно получиться после добавления воды;

3) $900 – 600 = 300$ (г) — воды надо добавить.

Ответ. 300 г.

883. В первый день рабочий перевыполнил дневное задание на 2%, во второй день он перевыполнил дневное задание на 4%. На сколько процентов рабочий перевыполнил задание двух дней?

Решение. Пусть дневное задание составляет a единиц. Тогда в первый день рабочий сделал $1{,}02a$ единиц. Во второй день он сделал $1{,}04a$ единиц, а за два дня — $1{,}02a + 1{,}04a = 2{,}06a$ единиц. Задание двух дней ($2a$ единиц) оказалось выполненным на $\frac{2{,}06a \cdot 100}{2a}$ = 103 (%), т. е. перевыполненным на 3 %.

Ответ. На 3%.

Промежуточный контроль. С–29.

4.9. Десятичные дроби произвольного знака

В данном пункте учебника вводятся отрицательные десятичные дроби. Все действия с десятичными дробями произвольного знака выполняются по тем же правилам, что и с целыми числами. Следует обратить внимание на оформление записей при вычислениях с отрицательными числами: действие с отрицательными числами или вычитание большего числа из меньшего надо записывать в строчку, определять знак результата, лишь потом находить его модуль, выполняя при необходимости вычисления столбиком или деление уголком (см. задание **893**).

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **287–290**.

Решения и комментарии

893. а) Вычислите: (–654,84 : 32,1 – 35,568 : (–3,42)) : 2,5.

Решение.

1) –654,84 : 32,1 = –6548,4 : 321 = –20,4;

2) 35,568 : (–3,42) = –3556,8 : 342 = –10,4;

3) –20,4 – (–10,4) = –20,4 + 10,4 = –10;

4) –10 : 2,5 = –100 : 25 = –4.

$$\begin{array}{r|l} -\,6548{,}4 & 321 \\ \underline{642} & \overline{20{,}4} \\ -\,1284 & \\ \underline{1284} & \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -\,3556{,}8 & 342 \\ \underline{342} & \overline{10{,}4} \\ -\,1468 & \\ \underline{1468} & \\ 0 & \end{array}$$

Ответ. –4.

Промежуточный контроль. С–30, С–31, Т–39.

4.10. Приближение десятичных дробей

4.11. Приближение суммы, разности, произведения и частного двух чисел

В пункте 4.10 учебника вводятся понятия приближения числа, приближённого равенства, приближения числа с недостатком, с избытком, с округлением, понятие значащей цифры числа. В пункте 4.11 на конкретных примерах показано, как правильно округлять числа при выполнении действий с приближениями чисел. Для сложения и вычитания, а также для умножения и деления сформулированы отдельно правила округления чисел при этих вычислениях.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **291–303**.

Решения и комментарии

903. Округлите число a с точностью до 0,001:

а) $a = 8{,}91011...$; б) $a = –8{,}91011...$; в) $a = 0{,}2626$; г) $a = 0{,}6265$.

Решение. а) $a = 8{,}91011... \approx 8{,}910$; б) $a = –8{,}91011... = –8{,}910$;

в) $a = 0{,}2626 \approx 0{,}263$; г) $a = 0{,}6265 \approx 0{,}627$.

904. Подчеркните значащие цифры числа:

а) 3,52; б) 0,352; в) 0,03520; г) 7,405;

д) 4,203; е) 0,005; ж) 0,0420; з) 7,0003;

и) 10,0050; к) 6,700; л) 0,00067; м) 0,0100.

Решение.

а) $\underline{3},\underline{52}$; б) $0,\underline{352}$; в) $0,0\underline{3520}$; г) $\underline{7},\underline{405}$;

д) $\underline{4},\underline{203}$; е) $0,00\underline{5}$; ж) $0,0\underline{420}$; з) $\underline{7},\underline{0003}$;

и) $\underline{10},\underline{0050}$; к) $\underline{6},\underline{700}$; л) $0,000\underline{67}$; м) $0,0\underline{100}$.

905. Округлите число 1995,1996: а) до десятых; б) до сотых; в) до тысячных; г) до единиц; д) до десятков; е) до сотен.

Решение. а) $1995{,}1996 \approx 1995{,}2$; б) $1995{,}1996 \approx 1995{,}20$;

в) $1995{,}1996 \approx 1995{,}200$; г) $1995{,}1996 \approx 1995$;

д) $1995{,}1996 \approx 2000$; е) $1995{,}1996 \approx 2000$.

Замечание. При округлении числа до десятков и до сотен получились одинаковые результаты. Чтобы показать, какие цифры в записи числа после округления «вполне надёжны», их можно подчеркнуть и выделить множитель, содержащий только «вполне надёжные» цифры:

д) $1995{,}1996 \approx \underline{200}0 = 2{,}00 \cdot 10^3$; е) $1995{,}1996 \approx \underline{20}00 = 2{,}0 \cdot 10^3$.

906. Округлите число 1039,9301 до семи; шести; пяти; четырёх; трёх значащих цифр.

Решение. $1039{,}9301 \approx 1039{,}930$; $1039{,}9301 \approx 1039{,}93$;

$1039{,}9301 \approx 1039{,}9$; $1039{,}9301 \approx 1040$; $1039{,}9301 \approx \underline{104}0 = 1{,}04 \cdot 10^3$.

912. а) Округлите числа a и b с точностью до 0,01 и вычислите приближённо их сумму $a + b$ и разность $a - b$: $a = 1{,}4545$, $b = -1{,}203$.

Решение. $a = 1{,}4545 \approx 1{,}45$, $b = -1{,}203 \approx -1{,}20$;

$a + b \approx 1{,}45 + (-1{,}20) = 0{,}25$; $a - b \approx 1{,}45 - (-1{,}20) = 1{,}45 + 1{,}20 = 2{,}65$.

913. а) Округлив числа a и b с точностью до третьей значащей цифры, вычислите приближённо их произведение $a \cdot b$ и частное $a : b$: $a = -2{,}435$, $b = 1{,}923$.

Решение. $a = -2{,}435 \approx -2{,}44$, $b = 1{,}923 \approx 1{,}92$;

$a \cdot b \approx -2{,}44 \cdot 1{,}92 = -4{,}6848 \approx -4{,}68$;

$a : b \approx -2{,}44 : 1{,}92 = -1{,}27083\ldots \approx -1{,}27$.

Промежуточный контроль. С–32, С–33, Т–40, Т–41, К–7.

Дополнения к главе 4

1. Вычисления с помощью калькулятора

2. Процентные расчёты с помощью калькулятора

В пункте 1 на конкретных примерах показано, как выполнять вычисления с десятичными дробями с помощью калькулятора, как пользоваться памятью калькулятора для сохранения результатов промежуточных вычислений. Объясняется, в каких случаях результаты вычислений с помощью калькулятора получаются точными, а в каких — приближёнными.

В пункте 2 на конкретных примерах показано, как выполнять процентные расчёты с помощью калькулятора: нахождение нескольких процентов числа, увеличение (уменьшение) числа на несколько процентов, нахождение числа по его процентам и др.

Решения и комментарии

920. а) Вычислите с помощью калькулятора: $1 : 9 \cdot 9$. Точный или приближенный результат получился? Каков точный ответ?

Решение. $1 : 9 \cdot 9 \approx 0{,}9999999$ — результат приближенный; точный ответ: $1 : 9 \cdot 9 = 1$.

921. Вычислите с помощью калькулятора:

а) $891 : 297$; б) $297 : 891$; в) $999{,}9999 \cdot 9$; г) $7777{,}7777 : 1{,}4$.

Решение. а) $891 : 297 = 3$; б) $297 : 891 \approx 0{,}3333333$;

в) $999{,}9999 \cdot 9 = 8999{,}9991$; г) $7777{,}7777 : 1{,}4 = 5555{,}5555$.

933. Вася прочитал в газете, что за последние 3 месяца цены на продукты питания росли в среднем на 10% за каждый месяц. На сколько процентов выросли цены за 3 месяца?

Решение. Пусть цена на некоторый продукт была *a* р. За 3 месяца цена 3 раза увеличится в $1 + 0{,}10 = 1{,}1$ раза, т. е. в $1{,}1^3 = 1{,}331$ раза, и составит $1{,}331a$. За 3 месяца она увеличится на $1{,}331a - a = 0{,}331a$, или на 33,1%.

Ответ. На 33,1%.

934. Деньги, вложенные в акции известной фирмы, приносят ежегодно 20% дохода. Через сколько лет вложенная сумма удвоится, если доход начисляется по формуле сложных процентов?

Решение. Пусть цена акций была *a* р. Акции будут стоить:

через 1 год: $a \cdot (1 + 0{,}20) = 1{,}2a$ (р.);

через 2 года: $a \cdot (1 + 0{,}20)^2 = 1{,}44a$ (р.);

через 3 года: $a \cdot (1 + 0{,}20)^3 = 1{,}728a$ (р.);

через 4 года: $a \cdot (1 + 0{,}20)^4 = 2{,}0736a$ (р.).

Итак, вложенная сумма удвоится через 4 года (точнее, увеличится в 2,0736 раза).

Ответ. Через 4 года.

3. Фигуры в пространстве, симметричные относительно плоскости

В данном пункте рассказывается о зеркальной симметрии в пространстве или симметрии относительно плоскости. На шуточных примерах о чтении слов с помощью зеркала и других наглядных примерах показывается, что две фигуры в пространстве могут быть симметричны друг другу относительно плоскости, что существуют фигуры, имеющие плоскость симметрии, и некоторые из них имеют несколько плоскостей симметрии, что симметрия относительно плоскости используется при построении зданий.

Для иллюстрации симметричности фигур относительно плоскости используются куб, правильная пирамида, цилиндр, конус и др.

Решения и комментарии

940. Петя получил записки с непонятными словами (рис. 18 и 19). Он догадался, как прочитать их с помощью зеркала. Придумайте слова, которые можно зашифровать тем же способом и прочитать с помощью зеркала.

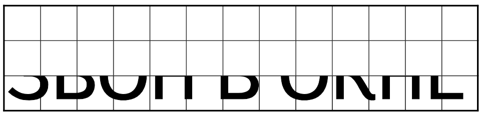

Рис. 18

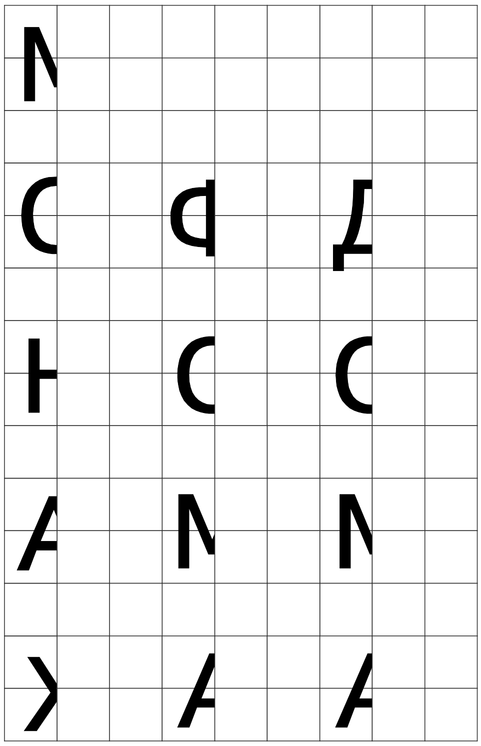

Рис. 19

Эта задача-шутка позволяет в игровой форме обратить внимание учащихся на симметричные относительно прямой на плоскости и относительно плоскости в пространстве буквы русского алфавита. Учащиеся могут проявить фантазию и творчество, придумывая свои слова (предложения), симметричные относительно плоскости в пространстве.

Решение. На рисунке 18 «зашифровано» предложение ЗВОН В ОКНЕ, на рисунке 19 «зашифровано» предложение МОНАХ ФОМА ДОМА.

4. Исторические сведения

В данном пункте учебника приведены сведения об истории возникновения десятичной системы счисления, которую в учебной литературе впервые в России использовал Л. Ф. Магницкий в своей «Арифметике» (1703).

5. Занимательные задачи

Решения и комментарии

942. Некий леспромхоз решил вырубить сосновый лес, но экологи запротестовали. Тогда директор леспромхоза всех успокоил, сказав: «В нашем лесу 99% сосны. После рубки сосна будет составлять 98% всех деревьев». Какую часть леса может вырубить леспромхоз?

Эта задача аналогична задаче **941** про арбуз, решение которой приведено в учебнике. Ответ аналогичен: число деревьев может уменьшиться в 2 раза, т. е. леспромхоз может вырубить половину всех деревьев. Скажем больше: условию задачи можно удовлетворить, оставив в лесу 49 сосен и 1 берёзу.

943. На коробке с вермишелью написано: «Масса нетто 500 г при влажности 13%». Какова масса вермишели, если она хранится при влажности 25%?

Решение. Вермишель содержит $(1 - 0{,}13) \cdot 500 = 435$ г сухого вещества, которое при влажности 25 % будет составлять $100 - 25 = 75$ % массы вермишели, равной $435 : 0{,}75 = 580$ г.

Ответ. 580 г.

945. Производительность труда повысили на 25%. На сколько процентов уменьшится время выполнения задания?

Решение. Пусть a ч делают по b деталей в час. Если производительность труда увеличить на 25 %, т. е. в $1{,}25 = \frac{5}{4}$ раза, то при том же объёме работы (ab деталей) время работы уменьшится в $\frac{5}{4}$ раза и составит $a : \frac{5}{4} = 0{,}8a$ ч. Время работы уменьшится на $100 - 80 = 20$ %.

Ответ. На 20%.

951. В классе 37 человек. Докажите, что из них найдутся хотя бы 4 человека, родившиеся в один месяц.

Решение. Пусть в каждом из 12 месяцев имеется по 3 именинника, всего — 36 именинников. Тогда оставшийся ученик будет четвёртым именинником в один из 12 месяцев.

953. Учительница объявила результаты диктанта. Больше всех ошибок было у Пети — 13. Докажите, что среди 28 учащихся, допустивших ошибки, найдутся 3 человека с одинаковым числом ошибок.

Решение. Если по два человека допустили 1, 2, …, 12 ошибок, то ошибки допустили $2 \cdot 12 = 24$ учащихся. Кроме них и Пети в классе ещё $28 - 1 - 24 = 3$ человека допустили ошибки. Любой из этих трёх человек допустил или 1, или 2, …, или 12 ошибок, поэтому найдутся 3 человека с одинаковым числом ошибок.

954. За 3 года Вася стал старше на 25%. Сколько теперь Васе лет?

Решение. 3 года составляют 25% прежнего возраста Васи. Следовательно, Васе было $3 : 0{,}25 = 12$ лет, а сейчас ему 15 лет.

Ответ. 15 лет.

955. б) Два года назад Маша была на 20% моложе, чем сейчас. Сколько лет Маше сейчас?

Решение. 2 года составляют 20% количества лет Маши сейчас. Следовательно, сейчас Маше $2 : 0{,}2 = 10$ лет.

Ответ. 10 лет.

Глава 5. Обыкновенные и десятичные дроби

При изучении заключительной темы курса математики 5–6 классов устанавливается связь между обыкновенными и десятичными дробями. Показывается, что несократимые дроби, знаменатель которых не содержит простых делителей, кроме 2 и 5, и только они, записываются в виде конечных десятичных дробей, остальные — в виде бесконечных периодических десятичных дробей. Делается вывод, что любое рациональное число можно записать в виде периодической десятичной дроби. Затем приводятся примеры бесконечных непериодических десятичных дробей, которые и называют иррациональными числами. Рациональные и иррациональные числа — это действительные числа.

Введение бесконечных десятичных дробей (необязательно периодических) позволяет ввести понятие длины произвольного отрезка. Здесь показывается, что длина отрезка как раз и есть бесконечная десятичная дробь, что каждой точке координатной оси соответствует действительное число.

В качестве примера иррационального числа рассмотрено число π и показано, как с его помощью вычисляют длину окружности и площадь круга. Вводятся декартова система координат на плоскости, столбчатые диаграммы и графики.

При наличии учебных часов рассматриваются задачи на составление и разрезание фигур, также способствующие развитию школьников. Следует отметить, что глава 5 может изучаться как ознакомительная, так как основное е` содержание повторяется в учебнике 7 класса тех же авторов.

Цель главы: изучить связь между обыкновенными и десятичными дробями, познакомить учащихся с действительными числами.

<u>5.1. Разложение положительной обыкновенной дроби в конечную десятичную дробь</u>

В данном пункте учебника выделено множество обыкновенных дробей, которые можно записать в виде конечных десятичных дробей. Показано, что любая конечная десятичная дробь записывается в виде обыкновенной, знаменатель которой не содержит простых делителей, кроме 2 и 5, и что несократимые дроби, знаменатели которых не содержат простых делителей, кроме 2 и 5, записываются в виде десятичных дробей. Отмечается, что есть два способа превращения обыкновенной дроби в десятичную:

1) умножение числителя и знаменателя обыкновенной дроби на степени 2 и 5 так, чтобы в знаменателе получилась степень 10;

2) деление числителя на знаменатель обыкновенной дроби уголком.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **304–306**.

Решения и комментарии

967. Можно ли разложить данную обыкновенную дробь в конечную десятичную дробь (ответ обосновать): а) $\frac{1}{7}$; б) $\frac{6}{48}$; в) $\frac{7}{352}$.

Решение. а) Так как дробь $\frac{1}{7}$ несократима и в разложении е` знаменателя 7 на простые множители содержится множитель 7, отличный от 2 и 5, то эту дробь нельзя разложить в конечную десятичную дробь.

б) Так как $\frac{6}{48} = \frac{1}{8}$ и в разложении знаменателя 8 на простые множители не содержатся множители, отличные от 2 и 5, то эту дробь можно разложить в конечную десятичную дробь.

в) Так как дробь $\frac{7}{352}$ несократима и в разложении е` знаменателя 352 на простые множители содержится множитель 11, отличный от 2 и 5, то эту дробь нельзя разложить в конечную десятичную дробь.

5.2. Бесконечные периодические десятичные дроби

5.3*. Периодичность десятичного разложения обыкновенной дроби

В пункте 5.2 учебника вводится понятие бесконечной периодической десятичной дроби. Обратим внимание на естественность появления в этом месте таких дробей: если разделить числитель несократимой обыкновенной дроби на е` знаменатель, имеющий любой простой множитель, отличный от 2 и 5, то возникает бесконечная периодическая десятичная дробь. Также естественно выглядит превращение любого целого числа или конечной десятичной дроби в бесконечную периодическую десятичную дробь с периодом 0.

Важно подвести итог изучения п. 5.2 выводом о том, что любое рациональное число имеет две формы записи: в виде обыкновенной дроби и в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

В пункте 5.3 приводится обоснование этого вывода, показывается, как любую периодическую десятичную дробь записать в виде обыкновенной дроби. В учебнике этот перевод демонстрируется на характерных примерах.

Обратим внимание на последний шаг: деление числителя полученной обыкновенной дроби на её знаменатель уголком. Это надо делать потому, что по определению бесконечная периодическая десятичная дробь есть результат деления числителя дроби на её знаменатель уголком. Кроме того, при переводе бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную используются арифметические действия с бесконечными периодическими десятичными дробями, которые не были обоснованы в учебнике.

Следует обратить внимание на замечание, что периодические дроби с периодом 9 обычно не рассматриваются.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **307–309**.

Решения и комментарии

977. Разложите обыкновенную дробь в периодическую: а) $\frac{56}{99}$; б) $\frac{67}{99}$.

Решение. Разделив числитель дроби на её знаменатель уголком, получим: а) $\frac{56}{99} = 0{,}(56)$; б) $\frac{67}{99} = 0{,}(67)$.

978. Используя предыдущие задания, запишите периодическую дробь в виде обыкновенной: а) 0,(1); д) 0,(25); ж) 0,(10).

Решение. а) $0{,}(1) = \frac{1}{9}$; д) $0{,}(25) = \frac{25}{99}$; ж) $0{,}(10) = \frac{10}{99}$.

985. а) Покажите, что периодическая дробь с периодом 9 равна конечной десятичной дроби: 0,3(9) = 0,4.

Решение. Пусть x = 0,3999…, тогда $10x$ = 3,999…, а $100x$ = 39,999… .

$100x - 10x$ = 39,999… – 3,999… ;

$90x = 36$;

$x = 36 : 90$;

$x = 0,4$.

Замечание. Так как при делении уголком не может появиться период 9, то в данном примере мы лишены возможности выполнить проверку результата делением уголком.

5.4. Непериодические бесконечные десятичные дроби

5.5*. Действительные числа

В пункте 5.4 учебника вводятся понятия бесконечной непериодической десятичной дроби, иррационального числа, действительного числа.

В пункте 5.5 учебника вводятся понятия целой и дробной частей положительной бесконечной дроби, модуля действительного числа, устанавливаются правила сравнения действительных чисел, сообщается, что на практике бесконечные десятичные дроби складывают, вычитают, умножают и делят приближённо, сформулированы основные свойства действительных чисел.

Решения и комментарии

990. Каким числом (рациональным или иррациональным) является число:

а) 0,275; б) 0,(2); в) 1,32323232…; г) 1,15(45);

д) 3,10110111011110…; е) 0,12345678…?

Решение. а) 0,275 — рациональное число, так как $0,275 = \frac{275}{1000} = \frac{11}{40}$;

б) 0,(2) — рациональное число, так как $0,(2) = \frac{2}{9}$;

в) 1,32323232… — рациональное число, так как $1,32323232\ldots = 1\frac{32}{99} = \frac{131}{99}$;

г) 1,15(45) — рациональное число, так как 1,15(45) = $\frac{11545-115}{9900} = \frac{127}{110}$;

д) 3,10110111011110… — иррациональное число;

е) 0,12345678… — иррациональное число.

1006. Сравните числа: а) 3,5 и 3,(5); б) –2,14 и –2,1(4).

Решение. а) 3,5 < 3,(5), так как 3,5 = 3,50, а 3,(5) = 3,55… и 3,50 < 3,55…;

б) –2,14 > –2,1(4), так как –2,14 = –2,140, а –2,1(4) = –2,144… и –2,140 > –2,144… .

1007. а) Округлите числа a и b с точностью до 0,1 и вычислите приближенно разность $a - b$, если a = 12,32, b = 0,1.

Решение. $a - b$ = 12,32 – 0,1 $\approx$ 12,3 – 0,1 = 12,2.

Дополнительные задания

1. В десятичной записи числа $\frac{4}{33}$ сначала зачеркнули пятую цифру после запятой, получили число a, затем зачеркнули восьмую цифру после запятой, получили число b. Сравните числа: $\frac{4}{33}$ и a; $\frac{4}{33}$ и b; a и b.

Решение. Так как $\frac{4}{33}$ = 0,121212121… , a = 0,121221212…, b = 0,121212112… , то $\frac{4}{33} < a$; $\frac{4}{33} > b$; $a > b$.

2. В десятичной записи действительного числа $\frac{115}{333}$ зачеркнули сотую цифру после запятой, получили число a. Сравните числа $\frac{115}{333}$ и a.

Решение. Так как сотая цифра после запятой в десятичной записи числа $\frac{115}{333}$ = 0,(345) = 0,345345… есть 3, то при её зачёркивании мы получим число a, в десятичной записи которого до сотой цифры будут те же цифры, что и у числа 0,(345), а сотая цифра будет не 3, а 4. Следовательно, $\frac{115}{333} < a$.

Промежуточный контроль. Т–42, Т–43.

5.6. Длина отрезка

В данном пункте на конкретных примерах объясняется, как измеряют отрезки, если задан единичный отрезок. Утверждается, что длина отрезка есть бесконечная десятичная дробь (и не всегда ясно — периодическая она или непериодическая). Отмечается, что верно и обратное утверждение: если дана бесконечная десятичная дробь и задан единичный отрезок, то можно указать отрезок, длина которого равна этой дроби.

Решения и комментарии

1027. в) Длина отрезка AB равна $3\frac{61}{99}$. Выразите длину отрезка десятичной дробью с точностью до 1; до 0,1; до 0,01 с недостатком.

Решение. $3\frac{61}{99} = 3{,}6161\ldots$, поэтому $3\frac{61}{99} \approx 3$; $3\frac{61}{99} \approx 3{,}6$; $3\frac{61}{99} \approx 3{,}61$.

1028. Выразите длину отрезка AB десятичной дробью с точностью до 0,1; 0,01; 0,001; 0,0001 с недостатком, если $AB = 3\frac{19}{99}$.

Решение. $3\frac{19}{99} = 3{,}191919\ldots$, поэтому $3\frac{19}{99} \approx 3{,}1$; $3\frac{19}{99} \approx 3{,}19$; $3\frac{19}{99} \approx 3{,}191$; $3\frac{19}{99} \approx 3{,}1919$.

Промежуточный контроль. Т–44.

5.7. Длина окружности. Площадь круга

В данном пункте сначала вводится иррациональное число π, а затем записаны формулы длины окружности и площади круга, выражающие эти величины через число π и радиус окружности, приведён пример вычисления длины окружности и площади круга по заданному радиусу. Среди задач данного пункта и рабочей тетради много задач на развитие умения решать геометрические задачи, на развитие творческого подхода.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **310–318**.

Решения и комментарии

1033. а) Как изменится длина окружности, если её радиус увеличить в 3 раза?

Решение. Пусть радиус окружности R, тогда её длина $C = 2\pi R$.

Рассмотрим новую окружность, радиус которой $3R$, её длина $C_1 = 2\pi(3R) = 3(2\pi R) = 3C$. Следовательно, длина C_1 окружности радиуса $3R$ в 3 раза больше длины исходной окружности радиуса R.

Итак, если радиус окружности увеличить в 3 раза, то длина окружности увеличится в 3 раза.

1035. а) Как изменится длина окружности, если её радиус увеличить на 3 см?

Решение. Пусть радиус окружности R см, тогда её длина $C = 2\pi R$ см.

Рассмотрим новую окружность, радиус которой $(R + 3)$ см, её длина $C_1 = 2\pi(R + 3) = 2\pi R + 2\pi\cdot 3 = C + 6\pi$ см, т. е. длина C_1 окружности радиуса $(R + 3)$ см примерно на 18,84 см больше длины исходной окружности радиуса R.

1037. а) Как изменится площадь круга, если его радиус увеличить в 3 раза?

Решение. Пусть радиус круга R, тогда его площадь $S = \pi R^2$.

Рассмотрим новый круг, радиус которого $3R$, его площадь $S_1 = \pi(3R)^2 = 9\pi R^2 = 9S$, т. е. площадь S_1 круга радиуса $3R$ в 9 раз $(9 = 3^2)$ больше площади исходного круга радиуса R.

1043. Земной шар стянули обручем по экватору. Затем увеличили обруч на 1 м. Пролезет ли кошка в образовавшийся зазор?

Решение. Пусть радиус Земного шара R см, тогда длина его экватора равна $C = 2\pi R$ см.

Рассмотрим новую окружность, которая получится после увеличения экватора на 100 см, её длина $C_1 = 2\pi R_1 = 2\pi R + 100$ см. Из равенства $2\pi R_1 = 2\pi R + 100$ выразим величину зазора $R_1 - R = \frac{100}{2\pi} \approx 15{,}92$ см. В такой зазор кошка пролезет.

Промежуточный контроль. Т–45.

5.8. Координатная ось

В данном пункте вводится понятие координатной оси, устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками оси x и действительными числами.

Важно, чтобы учащийся понял, что после введения иррациональных чисел координатная ось заполняется действительными числами полностью, без пропусков, она перестала быть «дырявой», какой была до введения иррациональных чисел.

Решения и комментарии

1053. Укажите на координатной оси точки:

а) 10; 11; 12; 13; б) –25; –24; –23; –22.

Решение. Изобразим на координатной оси заданные числа (на рисунке 20 не изображена точка O).

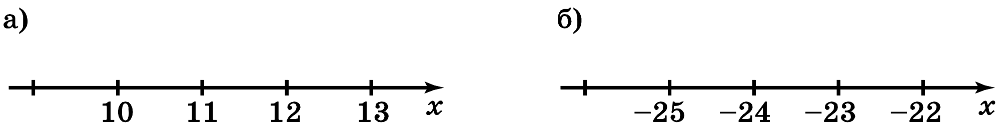

Рис. 20

1055. Покажите на оси x числа, которые:

а) больше 3; б) меньше –2; и) больше 0, но меньше 2.

Решение. Изобразим на координатной оси заданные числа штриховкой (рис. 21).

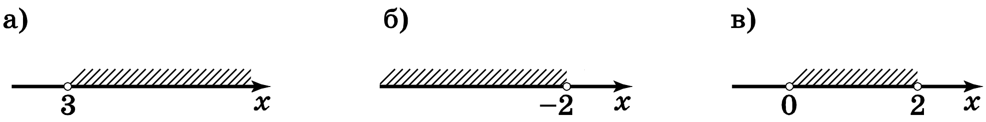

Рис. 21

5.9. Декартова система координат на плоскости

В данном пункте вводятся понятия декартовой системы координат на плоскости, осей координат, абсциссы и ординаты точки, координатных четвертей. Здесь имеются задания, нацеленные на освоение нового материала в игровой форме (изображения различных фигур, животных).

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **319–321**.

Решения и комментарии

1068. Постройте фигуру животного по точкам: (4; –3), (2; –3), (2; –2), (4; –2), (4; –1), (3; 1), (2; 1), (1; 2), (0; 0), (–3; 2), (–4; 5), (0; 8), (2; 7), (6; 7), (8; 8), (10; 6), (10; 2), (7; 0), (6; 2), (6; –2), (5; –3), (4; –3), (4; –5), (3; –9), (0; –8), (1; –5), (1; –4), (0; –4), (0; –9), (–3; –9), (–3; –3), (–7; –3), (–7; –7), (–8; –7), (–8; –8), (–11; –8), (–10; –4), (–11; –1), (–14; –3), (–12; –1), (–11; 2), (–8; 4), (–4; 5).

Постройте отдельно две точки: (2; 4), (6; 4) — это глаза животного.

Решение. На рисунке 22 изображена фигура слона.

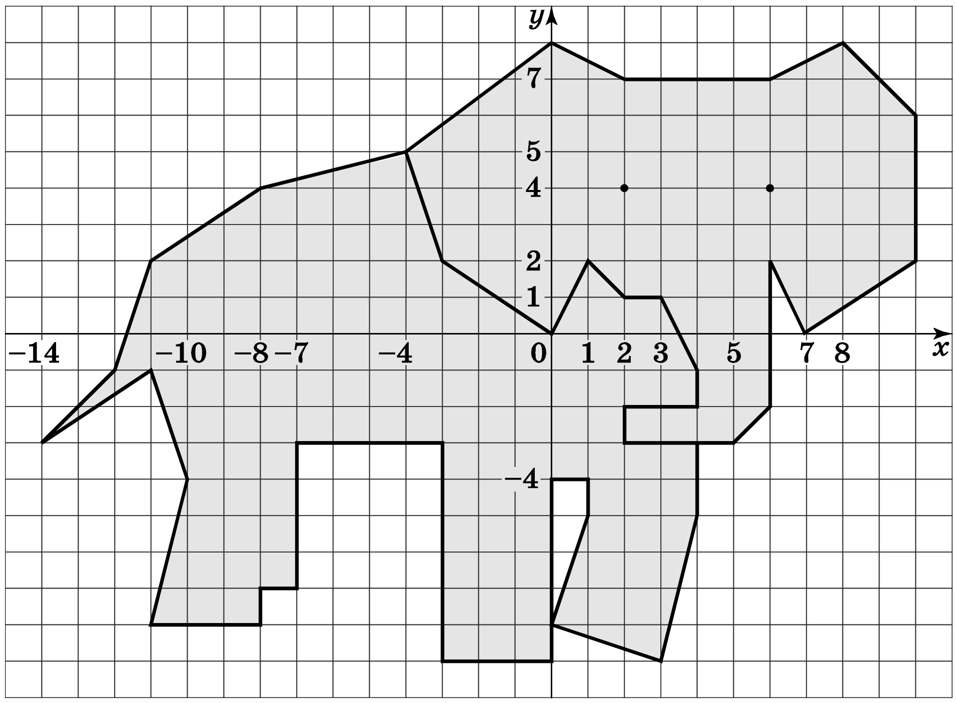

Рис. 22

Промежуточный контроль. Т–46.

5.10. Столбчатые диаграммы и графики

В данном пункте на конкретных примерах вводятся понятия столбчатой диаграммы, графика изменения величины и графика движения. Обратим внимание на важное практическое значение изучаемого материала.

РТ. Лучшему усвоению нового материала будет способствовать использование заданий **322–327**.

Решения и комментарии

1078. На рисунке 23 показан график движения двух пешеходов, вышедших из пунктов A и B навстречу друг другу.

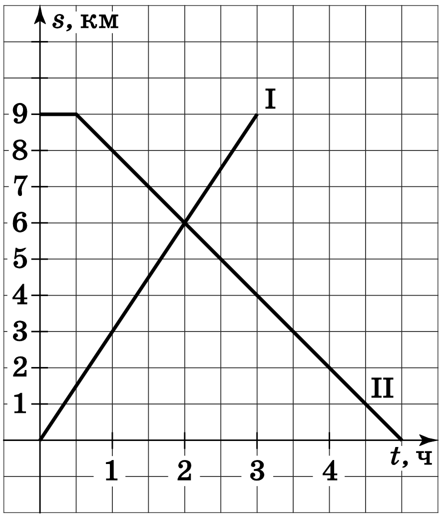

Рис. 23

а) Через сколько часов после выхода первого пешехода из пункта A второй пешеход вышел из пункта B?

б) Через сколько часов после выхода первого пешехода из пункта A они встретились?

в) С какой скоростью шёл первый пешеход?

Решение. а) Через 0,5 ч после выхода первого пешехода из пункта A второй пешеход вышел из B.

б) Через 2 ч после выхода первого пешехода из пункта A пешеходы встретились.

в) Первый пешеход шёл со скоростью 6 : 2 = 3 км/ч.

Промежуточный контроль. К–8.

Дополнения к главе 5

1. Задачи на составление и разрезание фигур

В данном пункте рассмотрено несколько задач на разрезание фигуры на равные части или составление фигуры из нескольких равных фигур. Здесь показано, что существует только одна фигура домино, две фигуры тримино. Аналогично можно показать, что существуют 5 фигур тетрамино и 12 фигур пентамино. В учебном тексте разобрано решение задачи на доказательство с использованием идеи раскраски. Некоторые задачи позволяют провести поиск числа всех решений задачи.

Решения и комментарии

1079. У шахматной доски отрезали две противоположные угловые клетки (рис. 24). Можно ли эту доску разрезать на фигуры домино, покрывающие две клетки доски?

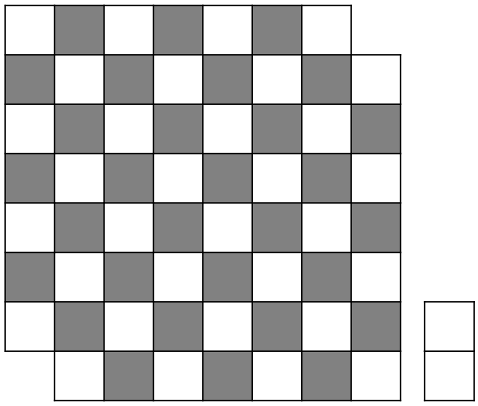

Рис. 24

Решение. Учащиеся могут долго и безуспешно разрезать доску на фигуры домино, но если они заметят, что каждый раз у них остаются две белые клетки (которые не составляют фигуру домино), то они поймут, что осуществить требуемое нельзя, так как на доске с отрезанными углами осталось 30 чёрных клеток и 32 белых. А одна фигура домино должна содержать одну чёрную и одну белую соседние клетки.

1081. Квадрат 4х4 состоит из 16 квадратов. Разрежьте его на: а) две; б) четыре равные части так, чтобы линия разреза шла по сторонам квадратов. Сколько способов разрезания вы найдёте?

Решение. Если учащиеся будут искать решения задачи без всякой системы, то всегда будет оставаться неясным ответ на вопрос: а нет ли ещё одного решения? Рассмотрим порядок поиска решения, применение которого позволяет утверждать, что найдены все решения задачи.

а) Ломаная, делящая квадрат на две равные части, согласно условиям задачи должна быть симметрична относительно центра квадрата, поэтому рисовать ломаную будем с двух концов. Начало и конец ломаной можно изобразить только двумя различными способами (рис. 25, *а* и рис. 25, *б*).

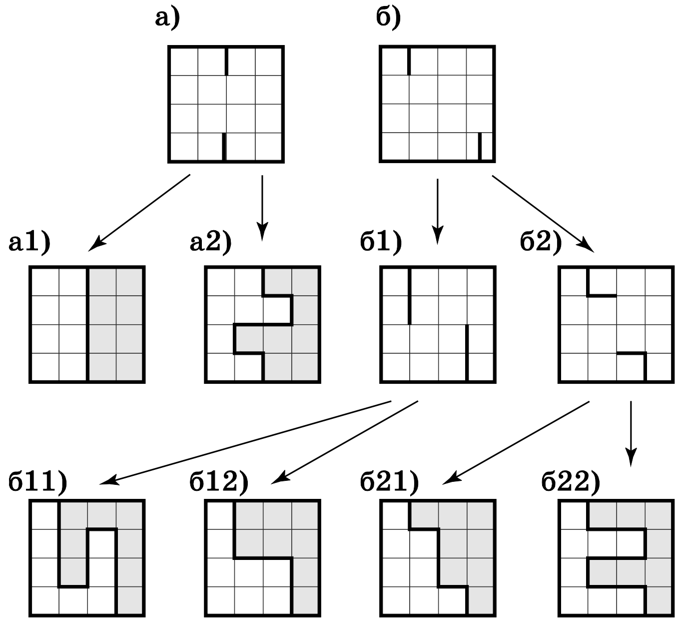

Рис. 25

Если начало и конец ломаной изобразить как-то иначе, то получится рисунок, который совпадёт с одним из рисунков 25, *а* или 25, *б*[1].

Рисование ломаной а) можно продолжить только двумя способами: а1) и а2). Каждый из этих способов рисования приводит к единственному решению. Получены два первых решения: а1) и а2).

Рисование ломаной б) можно продолжить только двумя способами: б1) и б2).

Рисование ломаной б1) можно продолжить только двумя способами: б11) и б12). Каждый из этих способов рисования приводит к единственному решению. Получены два новых решения: б11) и б12).

Рисование ломаной б2) можно продолжить только двумя способами: б21) и б22). Каждый из этих способов рисования приводит к единственному решению. Получены два новых решения: б21) и б22).

[1] Далее ссылки на варианты рисунка 25 даются без указания его номера.

Итого квадрат можно разрезать на равные части шестью способами.

б) Задача имеет четыре решения — из фигур 1, 2, 4, 5 тетрамино (из фигур 3 сложить квадрат 4 х 4 нельзя, обоснование похоже на то, которое приведено в задаче учебного текста).

Замечание. При решении задач на поиск всех возможных способов разрезания, аналогичных задаче **1081**, полезно придерживаться такого правила. В том случае, если рисование ломаной можно продолжить двумя способами, надо делать одну копию ломаной (если тремя способами, то две копии). И рисование каждой ломаной продолжить по тому же правилу.

2. Исторические сведения

В данном пункте учебника приведены сведения из истории использования иррациональных чисел.

3. Занимательные задачи

В данном пункте наряду с арифметическими имеются задачи геометрического содержания, при решении которых проводятся доказательные рассуждения, опирающиеся на свойства симметричных фигур, усвоенные учащимися ранее. Решение этих задач не является обязательным для всех учащихся. Следует учесть также, что в систематическом курсе геометрии решения таких задач могут быть иными. Они, например, могут сводиться к применению признаков равенства треугольников. Однако опыт доказательных рассуждений со ссылками на результаты, полученные ранее, окажется полезным. Учащиеся будут психологически готовы к тому, что некоторые утверждения (даже очевидные) в геометрии требуется доказывать.

Решения и комментарии

1092. Некто купил зимой акции АО *NNN* по 60 р. за акцию. К лету стоимость акций поднялась на 20 р. за акцию, а цены на товары за то же время увеличились на 20%. На сколько процентов увеличилась покупательная способность денег, вложенных в акции?

Решение. Пусть на 60 р. зимой можно было купить единицу некоторого товара, который летом уже стоил $60 \cdot 1{,}2 = 72$ р. Цена акции поднялась до 60 + 20 = 80 р. На эти деньги летом можно было купить 80 : 72 = $= 1\frac{1}{9}$ единицы того же товара. Покупательная способность денег, вложенных в акции, увеличилась на $\frac{1}{9}$, или на $\frac{100}{9}$ % = $11\frac{1}{9}$ %.

Ответ. На $11\frac{1}{9}$%.

1093. Мальчики составляют 45% всех учащихся школы. Известно, что 30% всех мальчиков и 40% всех девочек учатся без троек. Сколько процентов всех учащихся школы учится без троек?

Решение. Пусть в школе x учащихся, тогда в ней $0{,}45x$ мальчиков и $0{,}55x$ девочек. Без троек учатся $0{,}3 \cdot 0{,}45x = 0{,}135x$ мальчиков и $0{,}4 \cdot 0{,}55x = 0{,}22x$ девочек. Всего без троек учатся $0{,}135x + 0{,}22x = 0{,}355x$, или 35,5 %, всех учащихся школы.

Ответ. 35,5%.

1094. Рядовой Сидоров почистил бак картошки за 4 ч, и у него 20% всей картошки ушло в очистки. За сколько часов он начистит такой же (по массе) бак картошки?

Решение. Чтобы начистить 100 – 20 = 80 % бака картошки, рядовому Сидорову требуется 4 ч, а чтобы начистить полный бак, ему потребуется 4 : 0,8 = 5 ч.

Ответ. За 5 ч.

1095. Когда подвели итоги голосования по половине всех бюллетеней, то оказалось, что объединение «Ананас» получило 10% голосов избирателей. Подсчитайте, какое наибольшее и какое наименьшее число процентов голосов избирателей может набрать объединение «Ананас» на выборах после подсчета всех бюллетеней.

Решение. Пусть проголосовало x человек, после проверки половины бюллетеней объединение «Ананас» получило $0{,}1 \cdot 0{,}5x = 0{,}05x$, или 5 %, голосов всех избирателей. В худшем случае за объединение «Ананас» больше никто не проголосует, а в лучшем — проголосуют все оставшиеся избиратели. Наибольшее и наименьшее число процентов голосов объединения «Ананас» 55 % и 5 % голосов всех избирателей.

Ответ. 55% и 5%.

1096. Дан отрезок AB. Провели две пересекающиеся окружности одинакового радиуса с центрами в точках A и B. Точки пересечения окружностей обозначили M и N. Докажите, что точки A и B симметричны относительно прямой MN.

Решение. Две данные окружности симметричны относительно прямой AB, проходящей через их центры (рис. 26).

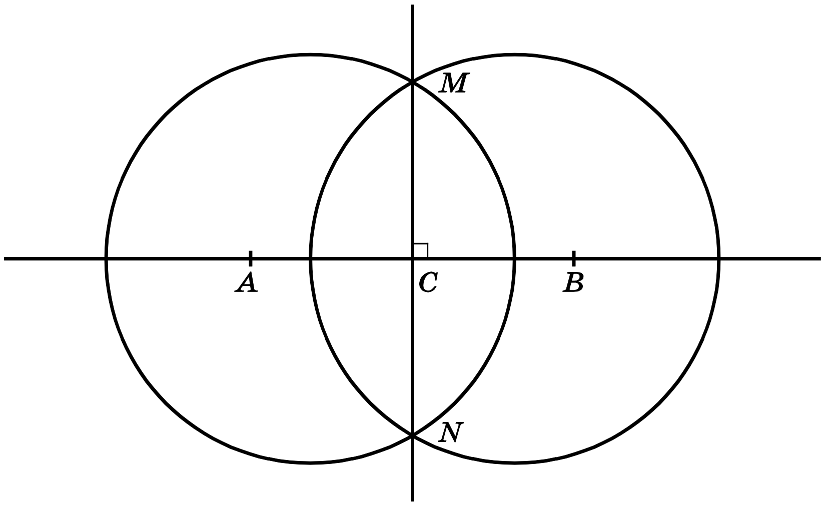

Рис. 26

Значит, одна из точек пересечения окружностей симметрична другой. Тогда угол MCB прямой. При симметрии с осью MN равные окружности переходят друг в друга, точка A — в точку B, значит, $AC = CB$. Тогда точки A и B симметричны относительно прямой MN, что и требовалось доказать.

1097. Серединным перпендикуляром к отрезку называют прямую, перпендикулярную отрезку и делящую его пополам. Докажите, что любая точка серединного перпендикуляра к отрезку одинаково удалена от концов этого отрезка.

Решение. Пусть a серединный перпендикуляр к отрезку AB (рис. 27).

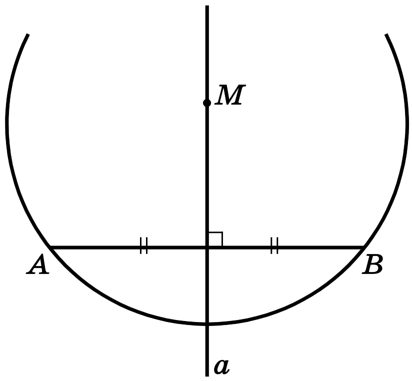

Рис. 27

Точки A и B симметричны относительно прямой a. Возьмём произвольную точку M на прямой a. Построим окружность с центром M и радиусом MA. Эта окружность симметрична относительно прямой a, т. е. точка B, симметричная точке A, лежит на окружности. Тогда $AM = BM$ (как радиусы одной окружности), что и требовалось доказать.

1101. Велосипедист проехал путь от A до B и обратно с некоторой постоянной скоростью. Пешеход прошёл путь от A до B со скоростью, в 2 раза меньшей скорости велосипедиста, но зато возвращался на автобусе со скоростью, в 4 раза большей скорости велосипедиста. Сколько времени затратил каждый из них на путь туда и обратно, если один был в пути на 0,5 ч дольше другого?

Решение. Так как скорость велосипедиста в 2 раза больше скорости пешехода, то в 2 раза больший путь — от A до B и обратно — он проедет за то же время, за которое пешеход прошёл путь от A до B. Это означает, что обратный путь пешеход проехал на автобусе за 0,5 ч. Так как скорость велосипедиста в 4 раза меньше, чем скорость автобуса, то на путь туда и обратно он затратит $2 \cdot 4 \cdot 0{,}5 = 4$ ч, а пешеход — $4 + 0{,}5 = 4{,}5$ ч.

Ответ. 4 и 4,5 ч.

1104. *Из «Арифметики» Л. Ф. Магницкого.* Некий человек нанял работника на год, обещал ему дать 12 р. и кафтан. Но тот, отработав 7 месяцев, захотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Хозяин дал ему по достоинству расчёт 5 р. и кафтан. Спрашивается, а какой цены тот кафтан был.

Решение. Пусть кафтан стоит *x* р., тогда выполняется равенство:

$$\frac{12+x}{12}\cdot 7 = 5 + x\,.$$

Решив это уравнение, получим стоимость кафтана 4,8 р.

Задачу можно решить арифметически. Работнику осталось работать 12 – 7 = 5 (месяцев), за которые ему заплатили бы 12 – 5 = 7 (р.), т. е. один месяц работы стоит 7 : 5 = 1,4 р., а за 7 месяцев ему заплатили бы 7 · 1,4 = = 9,8 р. Тогда кафтан стоил 9,8 – 5 = 4,8 р.

Ответ. 4,8 р.

1108. *Старинная задача.* Один араб перед смертью завещал трём своим сыновьям 17 верблюдов, с тем, чтобы старший получил половину, средний — треть, младший — девятую часть всех верблюдов. После смерти отца сыновья никак не могли разделить верблюдов по завещанию, и они позвали главу племени. Этот глава приехал на собственном верблюде и, узнав, в чём дело, предложил присоединить к их верблюдам своего и поделить их по завещанию. Братья обрадовались предложению главы племени. Но каково же было их удивление, когда оказалось, что, выполнив в точности завещание отца, они получили на самом деле не 18, а 17 верблюдов, вследствие чего им пришлось вернуть главе племени его верблюда. Почему так получилось?

Решение. Так как сумма дробей $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{9}$ равна $\frac{17}{18}$ и $\frac{17}{18} < 1$, то исполнить завещание отца в точности невозможно. Добавив ещё одного верблюда к 17 верблюдам, глава племени $\frac{1}{2}$ от 18 верблюдов, т. е. 9 верблюдов, дал старшему сыну, $\frac{1}{3}$ от 18 верблюдов, т. е. 6 верблюдов, дал среднему сыну, $\frac{1}{9}$ от 18 верблюдов, т. е. 2 верблюда, дал младшему сыну. Так он раздал 9 + 6 + 2 = 17 верблюдов, а оставшегося восемнадцатого верблюда забрал себе.

Повторение

При организации текущего и итогового повторения используются задания из раздела «Задания для повторения» и другие материалы.

Решения и комментарии

1231. Для 16 голов скота на 36 дней требуется 1,92 т сухой подстилки. Сколько сухой подстилки требуется для 20 голов скота на 40 дней?

Решение. Запишем коротко условие задачи:

16 голов — 36 дней — 1,92 т,

20 голов — 40 дней — x т.

Число голов увеличилось в $\frac{20}{16}$ раза, значит, масса подстилки увеличилась в $\frac{20}{16}$ раза; число дней увеличилось $\frac{40}{36}$ раза, значит, масса подстилки увеличилась ещ` в $\frac{40}{36}$ раза. Следовательно, $x = 1{,}92 \cdot \frac{20}{16} \cdot \frac{40}{36} = 2\frac{2}{3}$.

Ответ. $2\frac{2}{3}$ т.

1233. а) За 1 ч бригада маляров покрасила половину стены дома. Оставшуюся часть стены покрасил один человек за 4 ч. Сколько маляров в бригаде?

б) Бригада за полдня выполнила $\frac{3}{4}$ задания. Оставшуюся часть задания выполнил один человек за полдня. Сколько человек в бригаде?

в) Бригада плотников выполнила $\frac{3}{5}$ задания за полдня. Оставшуюся часть задания выполнил один плотник за день. Сколько плотников в бригаде?

г) *Задача Л. Н. Толстого.* Косцы должны выкосить два луга. Начав с утра косить большой луг, они после полудня разделились: одна половина осталась на первом луге и к вечеру его докосила, а другая — перешла косить на второй луг, площадью вдвое меньше первого. Сколько было косцов, если известно, что в течение следующего дня оставшуюся часть работы выполнил один косец?

Решение. а) Одну и ту же работу бригада маляров делает в 4 раза быстрее, чем 1 человек, следовательно, в бригаде 4 маляра.

б) За одно и то же время бригада делает работу, в 3 раза бо́льшую, чем 1 человек, следовательно, в бригаде 3 человека.

в) Плотник за 1 день выполняет $\frac{2}{5}$ задания, значит, за полдня он выполняет $\frac{1}{5}$ задания. Это в 3 раза меньше, чем вся бригада за то же время, следовательно, в бригаде 3 плотника.

г) Половина косцов после полудня выкосила в 2 раза меньше, чем все косцы до полудня. Значит, половина косцов за полдня выкашивает $\frac{1}{3}$ большого луга. Тогда один косец за день выкосил $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ часть большого луга, а за полдня $\frac{1}{12}$ большого луга. Все косцы за полдня выкосили $\frac{2}{3}$ большого луга, значит, всего было $\frac{2}{3} : \frac{1}{12} = 8$ косцов.

Ответ. а) 4 маляра; б) 3 человека; в) 3 плотника; г) 8 косцов.

1234. *Старинная задача.* 10 ветряных мельниц смололи 200 четвертей ржи в 12 дней, работая в день по 14 ч. По скольку часов в день должны работать 8 таких же мельниц, чтобы в 21 день смолоть 300 четвертей ржи?

Решение. Запишем коротко условие задачи:

10 мельниц — 200 четвертей — 12 дней — 14 ч,

8 мельниц — 300 четвертей — 21 день — x ч.

Число часов увеличится в $\frac{10}{8}$ раза, так как число мельниц уменьшится в $\frac{10}{8}$ раза; число часов увеличится в $\frac{300}{200}$ раза, так как число четвертей увеличится в $\frac{300}{200}$ раза; число часов уменьшится в $\frac{21}{12}$ раза, так как число дней увеличится в $\frac{21}{12}$ раза. Поэтому

$$x = 14 \cdot \frac{10}{8} \cdot \frac{300}{200} : \frac{21}{12} = 15.$$

Ответ. По 15 ч.

1272. Двое ели сливы. Один сказал другому: «Дай мне свои две сливы, тогда у нас слив будет поровну», на что другой ответил: «Нет, лучше ты дай мне свои две сливы — тогда у меня будет в два раза больше, чем у тебя». Сколько слив у каждого?

Решение. Пусть у друзей первый раз станет по x слив, тогда у первого было сначала $(x - 2)$ сливы, а у второго — $(x + 2)$ сливы. Второй раз у первого станет $(x - 4)$ сливы, а у второго — $(x + 4)$ сливы.

	Было	Станет первый раз	Станет второй раз
у первого	$x - 2$	x	$x - 4$
у второго	$x + 2$	x	$x + 4$

По условию задачи $(x + 4)$ в 2 раза больше, чем $(x - 4)$. Составим уравнение:

$$2(x - 4) = x + 4,$$

откуда $x = 12$. У первого было $12 - 2 = 10$ слив, а у второго $12 + 2 = 14$ слив.

Ответ. 10 и 14 слив.

1274. *Старинная задача (Греция).* Ослица и мул шли вместе, нагруженные мешками равного веса. Ослица жаловалась на тяжесть ноши. «Чего ты жалуешься, — сказал мул, — если ты мне дашь один твой мешок, моя ноша станет вдвое больше твоей, а если я дам тебе один мешок, наши грузы только сравняются». Сколько мешков было у каждого?

Решение. Арифметическое решение этой задачи дала ученица 6 класса Марченко К. (Ревякинская муниципальная гимназия, Московская область; учитель математики — Т. В. Абросимова).

Кристина сделала графическую иллюстрацию (рис. 28), на которой отражены все условия задачи.

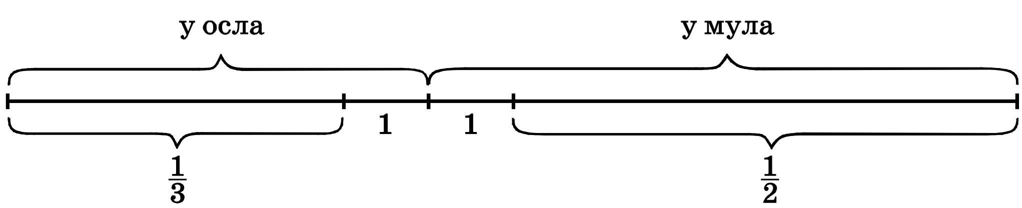

Рис. 28

Из рисунка видно, что на 2 мешка приходится $1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ числа всех мешков. Следовательно, всех мешков было $2 \cdot 6 = 12$. Тогда у мула было $12 : 2 + 1 = 7$ мешков, а у ослицы $12 - 7 = 5$ мешков.

Решим ту же задачу с помощью уравнения. Обозначим через x число мешков у каждого после передачи одного мешка от мула к ослице. Тогда первоначально у мула было $(x + 1)$ мешков, а у ослицы — $(x - 1)$ мешков. Если же сначала ослица даст мешок мулу, то у мула станет $(x + 2)$ мешков, а у ослицы — $(x - 2)$ мешков — в 2 раза меньше, чем у мула.

Решив уравнение $x + 2 = 2(x - 2)$, получим, что $x = 6$. Тогда у мула было $6 + 1 = 7$ мешков, а у ослицы $6 - 1 = 5$ мешков.

Ответ. У мула было 7 мешков, у ослицы — 5 мешков.

1284. а) Можно ли написать 45 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

б) Можно ли написать 55 различных двузначных чисел так, чтобы среди них не было двух чисел, дающих в сумме 100?

Решение. Назовём парой 2 различных натуральных числа, дающих в сумме 100. Среди чисел от 10 до 99 только 10 чисел не могут войти в такую пару: 50, 91, 92, ... , 99. Если выписать по одному числу из каждой пары, то получится 40 чисел. К ним можно добавить 5 чисел из десяти (50, 91, 92, ... , 99) так, чтобы среди выписанных чисел не было двух, дающих в сумме 100. Но нельзя добавить 15 чисел так, чтобы никакие 2 числа из полученного списка не образовывали пару.

Ответ. а) Можно; б) нельзя.

1287. Предание повествует, что царь Гиерон поручил мастеру изготовить корону и приказал выдать ему необходимое количество золота и серебра. Когда корона была доставлена, взвешивание показало, что она весит столько же, сколько весили золото и серебро. Однако правителю донесли, что мастер утаил часть золота, заменив его серебром. Гиерон призвал Архимеда и предложил ему определить, сколько золота и серебра заключает изготовленная корона. Архимед решил задачу, исходя из того, что чистое золото при взвешивании в воде теряет двадцатую долю своего веса, а серебро — десятую долю. Определите, сколько золота утаил мастер, если ему выдали 8 кг золота и 2 кг серебра, а корона весила в воде $9\frac{1}{4}$ кг.

Решение. Пусть в короне было x кг золота и $(10 - x)$ кг серебра. Корона весит в воде $\frac{19}{20}x + \frac{9}{10}(10 - x)$, или $9\frac{1}{4}$ кг. Решив уравнение

$$\frac{19}{20}x + \frac{9}{10}(10 - x) = 9\frac{1}{4},$$

получим $x = 5$. Мастер утаил $8 - 5 = 3$ (кг) золота.

Ответ. 3 кг.

Учебное издание

Серия «МГУ—школе»

Потапов Михаил Константинович

Шевкин Александр Владимирович

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации

6 класс

Пособие для учителей

общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией Т. А. Бурмистрова

Редактор Т. Г. Войлокова

Младший редактор Е. В. Трошко

Художник О. П. Богомолова

Художественный редактор О. П. Богомолова

Компьютерная графика С. А. Крутикова

Технический редактор

Корректор